

Эконометрический анализ финансовых данных в задачах управления риском

Мы продолжаем публикацию «четырёхсерийной» консультации профессора Московской школы экономики МГУ им. М. В. Ломоносова Деана Фантаццини. Первая часть была опубликована в № 2 (10) нашего журнала за 2008 год. Она была посвящена введению в проблему (раздел 1: основные понятия, основные типы финансовых рисков, методы их измерения), а также эконометрическим методам анализа **рыночного риска** (раздел 2).

В данном номере журнала читателю предлагается подробный обзор методов управления **операционным риском** (раздел 3).

Наконец, в двух следующих номерах журнала «Прикладная эконометрика» будет опубликована завершающая часть консультации (раздел 4), посвященная, быть может, наиболее актуальным для российской финансовой системы вопросам — методам управления **кредитным риском**.

Перевод оригинального англоязычного текста на русский язык осуществлен А. В. Кудровым под научной редакцией профессора С. А. Айвазяна.

3. Управление операционным риском

Количественный анализ операционного риска — это относительно недавняя область изучения, возникшая в рамках количественного управления рисками (см. [King (2001)] и [Cruz (2002)]). Проблема изучения операционного риска появилась в момент, когда было обнаружено, что ни управление рыночным риском, ни управление кредитным риском не позволяет хеджировать все возможные события, влияющие на экономические и финансовые результаты работы финансовых организаций.

Развитие этой области напрямую связано с *новой концепцией достаточности капитала*, также называемой Вторым Базельским соглашением. В этом разделе будут представлены и рассмотрены основные методологии расчета достаточности капитала, требуемого в рамках управления операционным риском.

Во Втором Базельском соглашении **операционный риск** определяется как «*риск убытков в результате неадекватной или ошибочной работы процессов, персонала, систем или в результате внешних воздействий*». Для того чтобы классифицировать все возможные операционные риски, во Втором Базельском соглашении (см. [BIS (2003)]) выделены семь типов событий (ТС) и восемь бизнес-направлений (БН) (табл. 1).

Однако в соглашении не представлено четких моделей для анализа и агрегирования рисков по всем ТС и БН. Оно лишь описывает некоторые основные правила, которым должно следовать каждое финансовое учреждение: уровень доверия, временной горизонт и анализ некоторых зависимостей. В частности, в соответствии со Вторым Базельским соглашением для анализа операционных рисков требуется одногодичный временной горизонт и уровень доверия $\alpha = 99,9\%$. Что касается анализа зависимостей, он еще не вполне развит, поэтому

**Таблица типов событий и бизнес-направлений,
составленная в соответствии со Вторым Базельским соглашением**

Тип события (ТС)
Внутренние махинации
Внешние махинации
Служебная практика и безопасность рабочего места
Клиенты, продукты и деловая практика
Ущерб, причиненный физическими активами
Перерывы в хозяйственной деятельности и отказы системы
Доставка и система управления процессами
Бизнес-направление (БН)
Корпоративные финансы
Торговля и продажи
Банковская розница
Банковская коммерция
Платежи и урегулирование
Агентские и депозитарные услуги
Управление активами
Розничные брокерские услуги

каждый банк должен следовать более консервативным моделям агрегирования: ТС предполагаются комонотонными¹, а при агрегировании используется простая сумма «границ потерь» (ГП_α) для каждого сочетания ТС или БН.

В этом разделе с помощью различных подходов вычислим величину достаточного рискового капитала: начнем с базовых подходов и завершим недавно предложенными моделями канонической агрегации, основанной на понятии копула-функций (см. [Di Clemente, Romano (2004)], [Fantazzini, Dalla Valle et al. (2007)] и [Fantazzini, Dalla Valle et al. (2008)]), пуассоновской моделью шоков (см. [Embrechts, Puccetti (2007)], [Rachedi, Fantazzini (2008)], а также байесовскими методами (см. [Dalla Valle, Giudici (2008)], [Dalla Valle (2008)]).

3.1. Регулирование операционного риска по Второму Базельскому соглашению

Во Втором Базельском соглашении введено понятие операционного риска как нового класса риска, под который финансовые учреждения обязаны отложить регулирующий капитал. В последней редакции документа подчеркивается, что определение операционного риска «включает юридический риск, но исключает стратегический и репутационный риск».

¹ Случайные величины X_1, \dots, X_d называются *комонотонными*, если найдутся такие возрастающие функции v_1, \dots, v_d и случайная величина Z , что функция распределения случайного вектора (X_1, \dots, X_d) совпадает с функцией распределения случайного вектора $(v_1(Z), \dots, v_d(Z))$.

Следуя [BIS (2003)], банки имеют возможность выбирать между тремя различными подходами:

- подход базовых индикаторов (ПБИ);
- стандартизированный подход (СП);
- подход, основанный на усовершенствованных моделях измерения риска (УМИР-подход).

Банкам рекомендуется работать в этом спектре методов до того момента, пока они не достигнут уровня, когда смогут разработать более совершенные модели. Если выбран *подход базовых индикаторов*, банк обязан удерживать определенную процентную долю от положительного валового дохода за каждый год из последних трех лет. Если выбран *стандартизированный подход*, деятельность банков делится на ряд бизнес-направлений, и процентная доля удержания применяется к среднему валовому доходу за три года для каждого бизнес-направления. Если же выбран *подход, основанный на УМИР*, банкам разрешается развивать более сложные внутренние модели, учитывающие взаимодействие между различными ТС и БН и направленные на создание более «мягких» рисков стратегий. Однако для этого банку необходимо сделать значительные инвестиции в управление операционными рисками. В частности, в контроле за операционным риском должны принимать активное участие совет директоров и топ-менеджмент банка; система управления операционным риском должна быть концептуально обоснованной, целостной и выделять достаточные ресурсы для использования усовершенствованных подходов на основных бизнес-направлениях, так же как для контроля и аудита. Перед окончательным внедрением таких систем банки должны продемонстрировать их надежность и соответствие надлежащей оценке неожиданных потерь, основанной на комплексном использовании внутренних и внешних данных, сценарном анализе и анализе факторов, определяющих особенности деятельности и внутреннего контроля. Более того, банк должен иметь независимую функцию управления операционными рисками. Внутренняя банковская система управления операционным риском должна быть тесно интегрирована в систему повседневного управления рисками топ-менеджментом и советом директоров. Банковская система управления операционными рисками должна быть хорошо документирована и регулярно проверяться как внутренними, так и внешними аудиторами.

Что касается количественных требований, относящихся к подходу УМИР, Базельский комитет указывает, что *«учитывая продолжающееся развитие аналитических подходов к анализу операционного риска, комитет не оговаривает какой-либо определенный подход или предположения относительно распределения, которое, в целях регулирования, следует использовать для генерации меры операционного риска. Тем не менее банк должен быть в состоянии показать, что применяемый им подход учитывает потенциально возможные события, влекущие за собой большие убытки. При любом подходе банк должен продемонстрировать, что используемая им мера операционного риска соответствует разумным стандартам, используемым в подходах к построению внутренних рейтингов для кредитного риска (т. е. сопоставима с 99,9-процентным доверительным интервалом, рассчитанным для одногодичного периода)...* Комитет признает, что УМИР — это достаточно гибкий стандарт, дающий банкам возможность развивать как систему измерения операционного

риска, так и систему управления. Вместе с тем в развитии этих систем банки должны придерживаться строгих процедур как при разработке моделей операционного риска, так и при реализации утвержденной модели. Прежде чем начать внедрение того или иного подхода, Комитет проведет обзор передового опыта в данной области относительно достоверности и устойчивости оценок возможных операционных убытков. Комитет также рассмотрит накопленные данные и уровень достаточности капитала, определенного в соответствии с УМИР-подходом, и, в случае необходимости, может внести некоторые поправки».

В том же документе Базельский комитет заявляет, что «система учета банковских рисков должна... учитывать все основные факторы операционного риска, влияющие на форму хвоста оценок потерь». Это означает, что любая модель, предлагаемая в рамках УМИР-подхода, должна учитывать возможность экстремальных событий. Кроме того, в этом же документе говорится, что «для расчета минимального достаточного регулирующего капитала должны учитываться разные оценки меры операционного риска. Однако банку может быть разрешено использование внутренне определенных корреляций убытков между отдельными оценками операционного риска, если, к удовлетворению национальных надзорных органов, системы, определяющие корреляции, надежны, хорошо интегрированы и учитывают неопределенность каждой из оценок корреляций (особенно в кризисные периоды). Он должен подтвердить свои предположения относительно корреляции с использованием соответствующих количественных и качественных методов». Этот комментарий подчеркивает возможность диверсификации операционных рисков. Тем не менее установлено, что в кризисные периоды такая диверсификация иногда невозможна.

Далее в документе, представленном Базельским комитетом, рассматриваются требования к данным, необходимым для системы контроля внутренних рисков. Данные по внутренним убыткам имеют важное значение для надежного моделирования профиля операционного риска организации. Излишне упоминать о том, что создание базы исторических данных об убытках крайне необходимо при переходе к УМИР-подходу для управления операционными рисками. База данных по банковским внутренним потерям должна соответствовать определенным стандартам, установленным Комитетом: «...банковские данные по внутренним убыткам должны быть достаточно подробными, поскольку должны отражать как всю банковскую деятельность, так и воздействие на нее всех соответствующих подсистем и географического местоположения. Банк должен уметь обосновывать, что исключение любой деятельности или воздействия, как отдельно взятой (взятого), так и в сочетании, не будет иметь существенного влияния на оценку совокупного риска. Для собранных данных о внутренних убытках банк должен иметь соответствующий порог минимального валового убытка, например 10 000 евро. Величина этого порога может варьироваться как от банка к банку, так и внутри банка, в зависимости от банковских бизнес-направлений и/или типов событий. Тем не менее величины отдельных порогов должны быть в целом согласованы с соответствующими порогами, используемыми в равноценных банках».

Понятие порога становится особенно важным, когда данные из различных банков объединяются в единую базу или когда внешние данные объединяются с внутренними данными банка. Такое объединение должно быть проведено в строго систематизированной форме, чтобы избежать потери информации о существенных операционных убытках.

3.2. Подход базовых индикаторов (ПБИ)

Банкам, использующим подход базовых индикаторов, необходимо отложить резервный капитал, равный фиксированной доле (обозначенной через α) от положительного годового валового дохода (ВД). Если же годовой валовой доход отрицателен или равен нулю, то он должен быть исключен из рассмотрения при вычислении среднего. Таким образом, **резервный капитал под операционный риск** в год t дается выражением²:

$$RC_{BI}^t = \frac{\alpha}{Z_t} \sum_{i=1}^3 \max(GI^{t-i}, 0), \quad (1)$$

где GI^{t-i} обозначает валовой доход за $(t-i)$ -й год, а Z_t — количество элементов последовательности $\{t-1, t-2, t-3\}$, соответствующее годам, при которых $GI^{t-i} > 0$. Отметим, что резервный капитал под операционный риск рассчитывается ежегодно. Подход базовых индикаторов дает довольно простую, основанную на размере капитала процедуру расчета резервных средств.

Базельский комитет по-прежнему занимается сбором данных в целях определения *фиксированного процента* α , который вычисляется как среднее из долей операционных резервных капиталов 12% банков, характеризующихся минимальными операционными резервными капиталами. Целевой уровень в 12% соответствует данным, полученным в рамках исследования «Изучение количественного воздействия» (ИКВ), проведенного Базельским комитетом. В этом исследовании рассматривалась выборка из 41 банка: в частности, оказалось, что среднее отношений операционного капитала к экономическому³ равно 14,9%. Как это описано Базельским комитетом, цифра в 12% была выбрана для того, чтобы «калибровать капитал с помощью в некоторой степени менее жесткого по сравнению с интервальным экономическим капиталом, но разумного стандарта». После установления 12%-го целевого уровня был проведен анализ зависимости между целевым операционным резервным капиталом и валовым доходом на основе выборки, включающей данные по 140 банкам из 24 стран. После проведения этих и иных ИКВ-исследований Базельский комитет предложил $\alpha = 15\%$.

Схема БИ-подхода иллюстрирует классический подход «сверху вниз», который калибрует капитал так, чтобы задавать общее требование к резервному капиталу. Этот подход отличается от так называемого подхода «снизу вверх», при котором размер резервного капитала определяется на основании истории фактических убытков и которому в настоящее время Базельский комитет отдает предпочтение.

3.3. Стандартизированный подход (СП)

Подход БИ предназначался для реализации в крупных банках. Переход же к стандартизированному подходу требует от банка учета валового дохода отдельно по каждому бизнес-направлению. Модель разделяет восемь бизнес-направлений: корпоративные финансы, торговля и продажи, банковская розница, банковская коммерция, платежи и урегулирова-

² Предполагается, что описанная процедура приемлема только для тех банков, которые не имели трехлетних периодов функционирования с отрицательным или нулевым ВД.

³ *Экономический капитал* — это капитал, необходимый для адекватного покрытия всех рисков, принимаемых конкретным банком.

ние, агентские и депозитарные услуги, управление активами и розничные брокерские услуги. Для каждого бизнес-направления рассчитывается резервный капитал, величина которого равна валовому доходу по рассматриваемому бизнес-направлению, умноженному на коэффициент, обозначенный через β (для каждого бизнес-направления свой). **Суммарный резервный капитал** RC_{SA}^t в t -й год рассчитывается как трехгодичное среднее неотрицательных валовых доходов:

$$RC_{SA}^t = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \max \left(\sum_{j=1}^8 \beta_j GI_j^{t-i}, 0 \right). \quad (2)$$

Заметим, что в формуле (2) в любой фиксированный год $t - i$ отрицательное значение резервного капитала по некоторому бизнес-направлению j (отрицательное значение возникает из-за отрицательности валового дохода по этому направлению) может быть компенсировано за счет положительных резервных капиталов по другим бизнес-направлениям. Взаимозачеты такого рода должны побудить банки к переходу от ПБИ к СП. В табл. 2 представлены бета-множители для каждого бизнес-направления. В работе [Moscadelli (2004)] представлен критический анализ этих бета-множителей, основанный на информационной базе по более чем 47 000 операционных убытков (второе ИКВ, лето 2002 года).

Таблица 2

Бета-множители для стандартизированного подхода

Бизнес-направление	Бета-множитель, %
Корпоративные финансы	18
Торговля и продажи	18
Банковская розница	12
Банковская коммерция	15
Платежи и урегулирование	18
Агентские и депозитарные услуги	15
Управление активами	12
Розничные брокерские услуги	12

Стандартизированный подход — это обобщение подхода БИ с определенным β для каждого бизнес-направления. В рамках этих двух подходов Комитет планирует дальнейшую разработку основополагающих принципов. Кроме того, по усмотрению национальных надзорных органов в вышеизложенные правила могут быть внесены незначительные изменения (часто более консервативные).

3.4. Подход, основанный на усовершенствованных моделях измерения риска (УМИР-подход)

Наиболее совершенный из трех подходов к расчету регулирующего операционного рискового капитала — это УМИР-подход. Этот подход позволяет банкам использовать собственную внутреннюю систему управления операционным риском для расчета минимального уровня регулирующего капитала с учетом количественных и качественных стандартов, установленных регуляторами. Однако, как в случае рыночного и кредитного риска, внедрение

УМИР возможно только при условии одобрения и непрерывного контроля качества со стороны национальных надзорных органов. В соответствии с предъявляемыми требованиями банк должен отразить убытки по каждому бизнес-направлению и типу события. В частности, банки, как ожидается, объединяют внутренние регулярные высокочастотные убытки, так же как и соответствующие внешние нерегулярные низкочастотные убытки. Более того, банки должны дополнить свои отчеты описанием кризисных ситуаций как по уровню серьезности ущерба, так и по уровню зависимости между разными видами убытков. В отсутствие детализированных совместных моделей для различных видов убытков мера риска совокупного убытка должна рассчитываться как сумма соответствующих мер риска убытков по каждой категории.

В Базельском соглашении от 2001 года в рамках УМИР-подхода Комитет описывает три метода:

- **Подход внутренних изменений (ВИ-подход).** В соответствии с этим методом резервный капитал по операционным рискам зависит от суммы ожидаемых и непредвиденных убытков: ожидаемые убытки рассчитываются с использованием исторических данных банка, а непредвиденные убытки находятся путем умножения ожидаемых убытков на соответствующий коэффициент γ , полученный на основании анализа секторов.

- **Подход распределения убытков (РУ-подход).** Используя внутренние данные, можно рассчитать для каждой комбинации БН/ТС как вероятностное распределение частоты возникновения убытков, так и ее влияние (степень влияния) на определенном промежутке времени. Рассмотрим свертку распределения частоты с распределением величины убытка. Аналитически или численно можно получить вероятностное распределение суммарного убытка. Итоговая величина резервного капитала будет равна процентной точке этого распределения.

- **Оценочная карточка (ОК).** Эксперты должны структурировать процесс идентификации факторов, определяющих те или иные категории рисков, а затем на основании этого сформулировать вопросы, которые могут быть помещены в оценочную карточку. Одни вопросы касаются численной информации (например, скорость текучести кадров), вторые — экспертной оценки (например, скорость изменения в различных сферах бизнеса), а третьи — предполагают ответ типа «да/нет» (как, например, вопросы о соблюдении определенных принципов, о следовании конкретной политике). Вопросы отобраны таким образом, чтобы охватить факторы, определяющие как вероятность операционных событий, так и их влияние, а также чтобы спланировать действия банка для их смягчения. Параллельно с внедрением оценочных карточек и учетом их результатов рассчитывается банковский суммарный резервный капитал под операционные риски, который затем распределяется между категориями риска.

В последней версии Второго Базельского соглашения эти подходы не упоминаются, с тем чтобы обеспечить большую гибкость в выборе методов внутреннего измерения рисков.

Учитывая все возрастающее значение и возможность применения эконометрических методов (см., например, [Cruz (2002)]), сосредоточим наше внимание только на РУ-подходе.

3.5. Стандартный РУ-подход с комонотонными убытками

РУ-подход использует два типа распределений: один описывает частоту возникновения рискованных ситуаций, другой — функцию распределения величины убытка, возникающего

для каждой рассматриваемой рискованной ситуации. Определим частоту операционных убытков как число случаев возникновения этих убытков за некоторый промежуток времени, а степень убытка k -го случая — как величину соответствующего убытка. Формально для каждого типа риска i (т. е. типа, отвечающего некоторому пересечению БН/ТС) операционные убытки, накопленные за t -й период, где $t = 1, \dots, M$, M — число периодов времени, могут быть определены как сумма S_{it} случайного числа n_{it} убытков $(X_{ij}(t))$, $j = 1, \dots, n_{it}$:

$$S_{it} = X_{i1}(t) + X_{i2}(t) + \dots + X_{in_{it}}(t). \quad (3)$$

Отметим, что для каждого пересечения БН/ТС суммарный убыток, накопленный за t -й период, может быть представлен в следующем виде:

$$S_{it} = s_{it} n_{it},$$

где s_{it} — средний убыток i -го пересечения за t -й период времени;

n_{it} — частота операционных убытков.

РУ-подход предполагает, что для каждого t -го периода времени:

- индивидуальные убытки $(X_{ij}(t))$, $t = 1, \dots, M$; $j = 1, \dots, n_{it}$, — независимые и одинаково распределенные случайные величины;
 - случайная величина n_{it} не зависит от случайных величин $X_{ij}(t)$, $t = 1, \dots, M$; $j = 1, \dots, n_{it}$.
- Отсюда следует, что случайные величины n_{it} и s_{it} независимы;
- S_{it} , $t = 1, \dots, M$, — независимые и одинаково распределенные случайные величины.

Для заданного пересечения БН/ТС i строим дискретную функцию распределения числа убытков n_{it} за t -й период и \hat{n}_{it} штук непрерывных вероятностных плотностей величин убытков $X_{ij}(t)$ (где \hat{n}_{it} — наблюдаемое значение частоты i -го пересечения за t -й период). Обозначим через $\hat{x}_{ij}(t)$ наблюдаемое значение j -го убытка i -го пересечения за t -й период. Для каждого пересечения i и периода t функция правдоподобия наблюдений $\hat{\mathbf{n}}_i = (\hat{n}_{i1}, \dots, \hat{n}_{iM})$, $\hat{\mathbf{x}}_i = (\hat{x}_{i1}(1), \hat{x}_{i2}(1), \dots, \hat{x}_{in_{i1}}(1), \dots, \hat{x}_{i1}(M), \hat{x}_{i2}(M), \dots, \hat{x}_{in_{iM}}(M))$ имеет вид

$$L(\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{n}}_i | \theta_i, \eta_i) = \prod_{t=1}^M \left[\prod_{j=1}^{\hat{n}_{it}} f(\hat{x}_{ij}(t) | \eta_i) \right] p(\hat{n}_{it} | \theta_i), \quad (4)$$

где $f(\hat{x}_{ij}(t) | \eta_i)$ — плотность величины j -го убытка $\hat{x}_{ij}(t)$, а η_i обозначает вектор-параметр этой плотности;

$p(\hat{n}_{it} | \theta_i)$ — вероятность возникновения \hat{n}_{it} убытков для i -го пересечения в t -й период времени, а через θ_i обозначен вектор-параметр этой вероятности.

При РУ-подходе частота возникновения убытков за некоторый временной период может быть смоделирована с помощью пуассоновского или отрицательного биномиального распределения. Отрицательное биномиальное распределение может быть получено из пуассоновского распределения, если предположить, что параметр последнего не детерминированная, а случайная величина, имеющая гамма-распределение. Вследствие этого отрицательное биномиальное распределение — это смесь пуассоновского и гамма-распределения. Для моделирования величины убытка можно использовать экспоненциальное

распределение, распределение Парето, гамма-распределение или обобщенное распределение Парето (ОПР), полученное согласно теории экстремальных значений (ТЭЗ). Функция распределения F_{it} суммарных операционных убытков S_{it} для i -го пересечения БН/ТС за t -й период может быть получена сверткой распределения частоты и распределений величин убытка. Однако следует отметить, что представление в аналитическом виде этого распределения — весьма сложная, а иногда и нерешаемая задача. По этой причине стало обычной практикой аппроксимировать это распределение методом Монте-Карло, а именно: из теоретического распределения много раз (например, 10^6 раз) генерируется число убытков и соответствующие их величины; после чего в каждом из смоделированных случаев рассчитывается суммарный убыток; в результате по совокупности смоделированных суммарных убытков строим эмпирическую функцию распределения, которая аппроксимирует функцию распределения суммарных операционных убытков i -го пересечения за t -й период.

Если у нас есть функция распределения суммарного операционного убытка для i -го пересечения, по ней можно оценить такие меры риска, как *граница потерь* (ГП), *среднее ожидаемых потерь* (СОП), и на основании этих оценок определить величину резервного капитала для i -го пересечения на следующий период. После того как оценены ГП для каждого пересечения БН/ТС, рассчитывается ГП для всей совокупности операционных рисков (совокупная граница потерь), которая обычно вычисляется как сумма ГП всех пересечений БН/ТС, и тем самым предполагается, что суммарные убытки S_{it} комонотонны. Излишне говорить, что такое предположение нереалистично. Из теоремы Шкляра (см. [Sklar (1959)]), в силу комонотонности суммарных убытков, следует, что

$$H_{S_{1t}, \dots, S_{Rt}}(x_1, \dots, x_R) = \min(F_{S_{1t}}(x_1), \dots, F_{S_{Rt}}(x_R)), \quad (5)$$

где $H_{S_{1t}, \dots, S_{Rt}}(\cdot)$ — совместное распределение вектора суммарных убытков $S_{it}, i = 1, \dots, R$; $F_{S_{it}}(\cdot)$ — кумулятивная функция распределения суммарного убытка S_{it} .

3.5.1. Моделирование частоты возникновения убытков

Анализ убытков по операционным рискам подразделяется на построение модели частоты возникновения убытков и построение модели величины убытка. Учитывая тот факт, что убытки возникают в нерегулярные моменты времени, будем использовать дискретные распределения для описания частоты возникновения убытков. В стандартном РУ-подходе в качестве моделей для частоты возникновения убытков используется либо однородное пуассоновское, либо отрицательное биномиальное распределение.

Пуассоновское распределение дает вероятность реализации определенного числа событий за фиксированный интервал времени при условии, что эти события происходят с известной интенсивностью и вероятность реализации следующего события не зависит от времени, прошедшего с момента реализации предыдущего.

Если ожидаемое число реализованных событий за определенный период времени равно λ , тогда вероятность того, что число реализованных событий n_{it} есть в точности k (k — некоторое неотрицательное целое, $k = 0, 1, 2, \dots$), равно

$$P\{n_{it} = k | \lambda\} = p(k; \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Обозначим пуассоновское распределение с параметром λ через $Poisson(\lambda)$. Для этого распределения $E(n_{it}) = V(n_{it}) = \lambda$. Таким образом, число реализованных событий флуктуирует около своего среднего λ со стандартным отклонением $\sigma_{n_{it}} = \sqrt{\lambda}$. Эти флуктуации обычно называют пуассоновским шумом.

Альтернативным для моделирования частоты n_{it} является **отрицательное биномиальное распределение**. Оно имеет два параметра: p и r , где $0 < p < 1$ и $r > 0$. Обозначим отрицательное биномиальное распределение с параметрами p и r через $negBin(r, p)$. Функция распределения $negBin(r, p)$ имеет следующий вид:

$$P\{n_{it} = k | r, p\} = p(k; r, p) = \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k \text{ для } k = 0, 1, \dots,$$

где $\binom{k+r-1}{k}$ — число сочетаний из $k+r-1$ элементов по k , т. е.

$$\binom{k+r-1}{k} = \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(k+1)\Gamma(r)},$$

где $\Gamma(k) = (k-1)!$.

Следует отметить, что отрицательное биномиальное распределение с параметрами r и $r/(\lambda+r)$ при $r \rightarrow \infty$ сходится к пуассоновскому распределению с параметром λ :

$$Poisson(\lambda) = \lim_{r \rightarrow \infty} negBin(r, r/(\lambda+r)).$$

При такой параметризации r отвечает за отклонение от пуассоновского распределения. Поэтому отрицательное биномиальное распределение — весьма приемлемая и содержательная альтернатива пуассоновскому распределению. Это распределение сходится к пуассоновскому при бесконечно больших r , но при малых r имеет большую дисперсию, чем пуассоновское распределение.

Параметры этих распределений могут быть оценены по эмпирическим данным методом моментов или методом максимума правдоподобия.

В случае пуассоновского распределения, если мы воспользуемся *методом моментов*, получим следующую оценку параметра λ_i :

$$\hat{\lambda}_i = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}.$$

При использовании *метода максимума правдоподобия* мы рассматриваем функцию правдоподобия:

$$L(\hat{\mathbf{n}}_i | \lambda_i) = \frac{e^{-M\lambda_i} \lambda_i^{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}}}{\prod_{t=1}^M \hat{n}_{it}!}.$$

Логарифмическая функции правдоподобия дается выражением

$$\ln L(\hat{\mathbf{n}}_i | \lambda_i) = -M\lambda_i + \left(\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it} \right) \ln \lambda_i - \ln \prod_{t=1}^M \hat{n}_{it}!.$$

а производная по λ_i логарифма функции правдоподобия равна

$$\frac{\partial \ln L(\hat{n}_i | \lambda_i)}{\partial \lambda_i} = -M + \frac{1}{\lambda_i} \sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}.$$

Приравнивая эту производную к нулю:

$$-M + \frac{1}{\lambda_i} \sum_{t=1}^M \hat{n}_{it} = 0$$

и решая это уравнение относительно λ_i , получим оценку максимума правдоподобия:

$$\hat{\lambda}_i = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}.$$

Таким образом, в этом случае оба метода дают одинаковые результаты.

Что касается отрицательного биномиального распределения, в условиях относительно малых выборок метод моментов обычно предпочтительнее метода максимума правдоподобия из-за проблемы сходимости. Учитывая, что

$$E(n_{it}) = r_i \frac{1-p_i}{p_i}, \quad V(n_{it}) = r_i \frac{1-p_i}{p_i} \left(1 + \frac{1-p_i}{p_i} \right),$$

имеем

$$\mu_1 = r_i \frac{1-p_i}{p_i}, \quad \mu_2 = r_i \frac{1-p_i}{p_i} \left(1 + \frac{1-p_i}{p_i} \right) + \left(r_i \frac{1-p_i}{p_i} \right)^2,$$

где μ_1 — первый момент, а μ_2 — второй момент. Применяя метод моментов, получим следующие оценки параметров r_i и p_i :

$$\hat{r}_i = \frac{\hat{\mu}_1^2}{\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1^2 - \hat{\mu}_1}, \quad \hat{p}_i = \frac{\hat{\mu}_1}{\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1^2},$$

где оценки для $\hat{\mu}_1$ и $\hat{\mu}_2$ вычисляются следующим образом:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M \hat{n}_{it} \quad \text{и} \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}^2.$$

Вместе с тем методы стохастического моделирования (см. [Fantazzini, Dalla Valle et al. (2008)]) показывают, что пуассоновское распределение дает устойчивые оценки даже в условиях малых выборок, в то время как результаты, показываемые отрицательным биномиальным распределением, значительно отличаются. При $M = 72$ отрицательное биномиальное распределение дает некорректные оценки в 40% случаев, а средний квадрат ошибки и коэффициент вариации имеют большие значения. Более того, даже при $M = 2000$ смоделированных наблюдений оценки для r_i неустойчивы, а коэффициент вариации по-прежнему много больше 0,1. Результаты моделирования показывают, что оценки стабилизируются вокруг действительных значений только при более чем 5000 смоделированных наблюдений.

3.5.2. Моделирование величины убытка

Величина убытка может быть описана с помощью широкого спектра непрерывных распределений, начиная от экспоненциального и кончая обобщенным распределением Парето (ОРП).

Обозначим через $\hat{x}_{ij}(t)$ наблюдаемый j -й убыток i -го пересечения за t -й период, $t = 1, \dots, M$; $j = 1, \dots, \hat{n}_{it}$.

Плотность гамма-распределения

$$\varphi(x|\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\beta_2^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1)} (x - \beta_3)^{\beta_1 - 1} e^{-\beta_2(x - \beta_3)}$$

при $x > \beta_3$ ($\beta_1 \beta_2 > 0, \beta_3 \geq 0$), где

$$\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} z^{\beta-1} e^{-z} dz.$$

Это наиболее общая форма. Однако если мы положим, что $\alpha_i = \beta_1$, $\vartheta_i = 1/\beta_2$, а $\beta_3 = 0$, функция плотности примет следующий вид:

$$\varphi(x|\alpha_i, \vartheta_i) = \frac{(1/\vartheta_i)^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i)} x^{\alpha_i - 1} e^{-x/\vartheta_i}, \quad x > 0.$$

Взяв эту функцию плотности и применив метод моментов, получим следующие оценки ее параметров:

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\left(\frac{\sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{ij}(t)}{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}} \right)^2}{\frac{\sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{ij}^2(t)}{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}} - \left(\frac{\sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{ij}(t)}{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}} \right)^2}, \quad \hat{\vartheta}_i = \frac{\frac{\sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{ij}^2(t)}{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}} - \left(\frac{\sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{ij}(t)}{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}} \right)^2}{\frac{\sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{ij}(t)}{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}}}.$$

Другим приемлемым распределением для моделирования величины убытка i -го пересечения за период t является **экспоненциальное распределение**. Плотность этого распределения может быть получена из плотности гамма-распределения, если в последнем взять $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1/\lambda_i$, $\beta_3 = 0$, т.е. плотность экспоненциального распределения равна

$$\varphi(x|\lambda_i) = \frac{1}{\lambda_i} e^{-x/\lambda_i}, \quad \lambda_i > 0.$$

Оценка методом моментов параметра λ_i равна

$$\hat{\lambda}_i = \frac{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}}{\sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{ij}(t)}.$$

Кроме того, величину убытка $X_{ij}(t)$ можно моделировать с помощью **распределения Парето**, плотность которого

$$\varphi(x|\alpha_i, \vartheta_i) = \frac{\alpha_i \vartheta_i^{\alpha_i}}{(x + \vartheta_i)^{\alpha_i+1}}, \quad x > \vartheta_i, \quad \alpha_i > 0, \quad \vartheta_i > 0.$$

Заметив, что

$$E(X_{ij}(t)) = \frac{\vartheta_i}{\alpha_i - 1} \quad \text{и} \quad E(X_{ij}^2(t)) = \frac{2\vartheta_i^2}{(\alpha_i - 1)(\alpha_i - 2)},$$

и применив метод моментов, получим следующие оценки параметров:

$$\hat{\alpha}_i = \frac{2 \left(\frac{1}{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}} \sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{ij}(t) \right)^2}{\frac{1}{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}} \sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{ij}^2(t)} - 1, \quad \hat{\theta}_i = \left(\frac{1}{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}} \sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{ij}(t) \right) (\hat{\alpha}_i - 1).$$

Ввиду экстремального характера операционных убытков хвост распределения величины убытка может быть смоделирован с помощью **распределений, изучаемых в теории экстремальных значений** (ТЭЗ). В ТЭЗ анализируются редкие события. В финансы и страхование эта теория пришла из гидрологии для прогнозирования редких событий и для построения более устойчивых моделей непредвиденных экстремальных событий.

ТЭЗ позволяет нам отказаться от парадигмы гауссовского распределения для операционного риска. При этом особое внимание обращается на хвост распределения. Это становится особенно важным, когда рассчитываются такие меры риска, как ГП или СОП при больших доверительных уровнях, например в случае операционных рисков при 99,9%-м доверительном уровне.

ТЭЗ утверждает, что распределение убытков, превышающих некоторый высокий порог u , асимптотически (по u , стремящемся к максимально допустимому значению убытков, которое, в частности, может быть и $+\infty$) сходится к ОРП, кумулятивная функция распределения которого, как правило, выражается в следующем виде:

$$GPD_{\xi, \beta}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{y}{\beta}\right)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0; \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right), & \xi = 0. \end{cases} \quad (6)$$

В нашем случае полагаем $y = x - u$. При этом $y \geq 0$, если $\xi \geq 0$, и $0 \leq y \leq -\beta/\xi$, если $\xi \leq 0$; y называют *остатком*, а x — *превышением*. Условную функцию распределения остатка от аргумента y можно определить как функцию от x :

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u) = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)}. \quad (7)$$

Параметр ξ в обобщенном распределении Парето имеет определяющее значение:

- при $\xi = 0$ ОРП совпадает с экспоненциальным распределением;
- при $\xi < 0$ ОРП совпадает с распределением Парето II типа;
- при $\xi > 0$ ОРП совпадает с распределением Парето I типа.

Более того, этот параметр напрямую связан с существованием конечных моментов распределений убытков. При этом

$$E(x^k) = \infty, \text{ если } k \geq 1/\xi.$$

Следовательно, в случае если ОРП совпадает с распределением Парето I типа и $\xi \geq 1$, имеем бесконечное среднее (см. [Neslehova, Embrechts et al. (2006)]).

Следуя работам [Di Clemente, Romano (2004)] и [Fantazzini, Dalla Valle et al. (2008)], предлагаем моделировать величину убытка i -го пересечения за период t , обозначенную через $X_{ij}(t)$, на правом хвосте с помощью ОРП, а для остальных значений — с помощью логнормального распределения, а именно распределения

$$F_i(x) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{\ln x - \mu_i}{\sigma_i}\right), & 0 < x < u_i; \\ 1 - \frac{N_{u,i}}{N_i} \left(1 + \frac{\xi_i}{\beta_i}(x - u_i)\right)^{-1/\xi_i}, & u_i \leq x, \end{cases} \quad (8)$$

где $\Phi(\cdot)$ — стандартное нормальное распределение, $N_{u,i}$ — число убытков, превышающих уровень u_i , N_i — число наблюдаемых убытков i -го типа, а β_i и ξ_i — параметры ОРП.

Например, графический анализ третьего ТС (см. табл. 1), представленный на рис. 1 и 2, заимствованных из работы [Rachedi, Fantazzini (2008)], явно свидетельствует о том, что операционные убытки характеризуются высокой частотой малых убытков и низкой частотой больших убытков. Следовательно, операционные убытки имеют двойственный характер: один процесс лежит в основе малых и частых убытков, а другой — в основе больших и редких убытков. Разделение модели на две части позволяет нам разумным образом оценивать влияние экстремальных убытков.

Важный вопрос, который следует рассмотреть, — оценка параметров предлагаемой выше функции распределения $F_i(x)$. В то время как для случая логнормального распределения оценка методом максимума правдоподобия достаточно проста, для случая ОРП крайне важно поразмыслить над тем, какой из методов (например, метод максимума правдоподобия или метод взвешенных по вероятности моментов) лучше улавливает динамику изучаемых величин убытков.

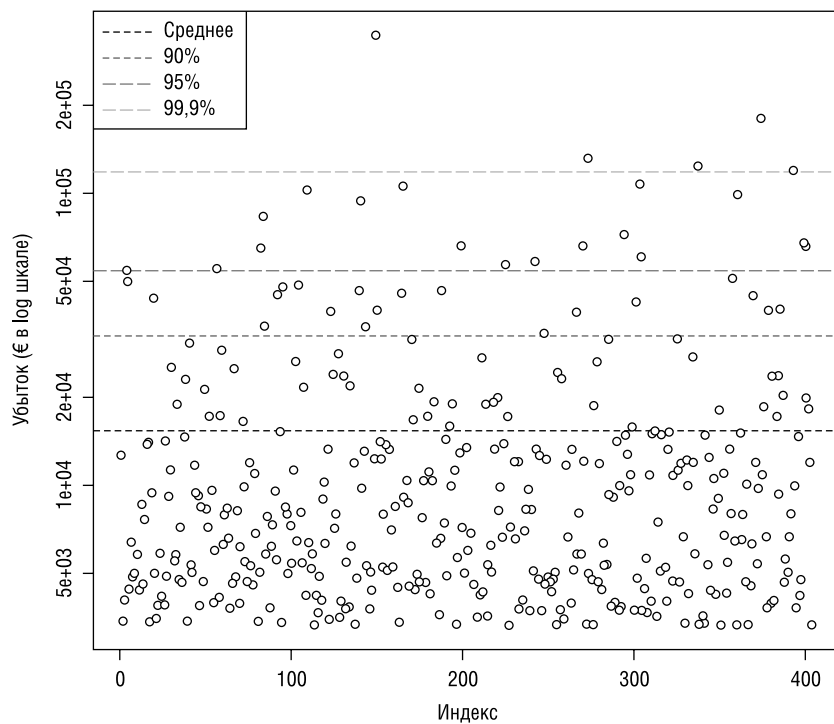


Рис. 1. Диаграмма рассеяния убытков третьего ТС

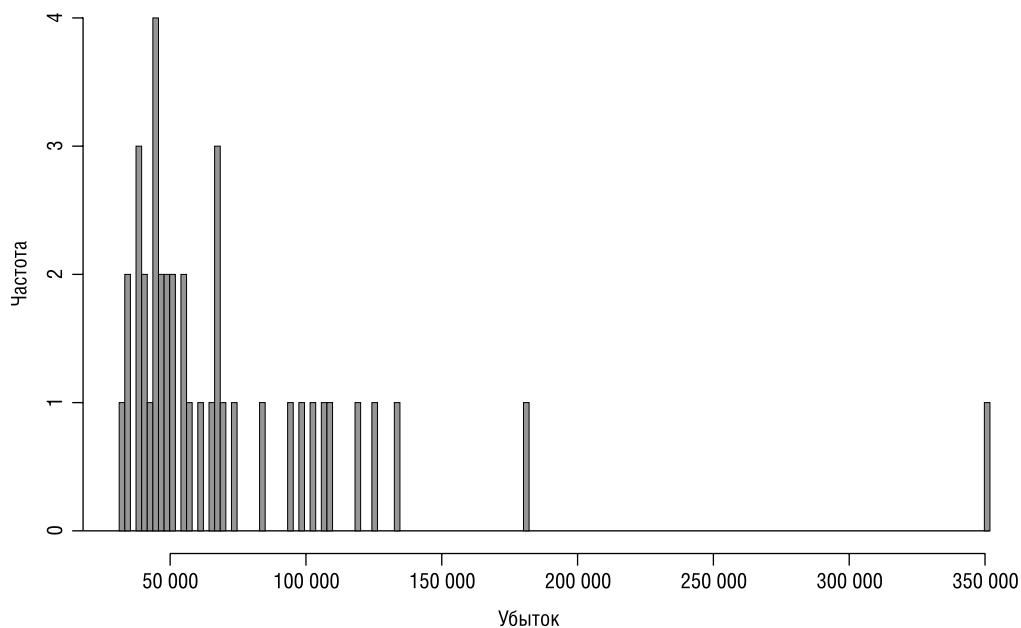


Рис. 2. Гистограмма убытков третьего ТС

Рассмотрим метод максимума правдоподобия для ОРП. Логарифмическая функция правдоподобия наблюдений $\hat{x}_{ij}(t)$, которые превышают соответствующий уровень u_i , равна

$$\ln L(i; \xi_i, \beta_i) = \sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_i} \left[-\ln \beta_i - \left(\frac{1}{\xi_i} + 1 \right) \ln \left(1 + \frac{\xi_i}{\beta_i} (\hat{x}_{ij}(t) - u_i) \right) \right] \mathbf{1}_{[\hat{x}_{ij}(t) > u_i]}, \quad (9)$$

где $\mathbf{1}_{[\hat{x}_{ij}(t) > u_i]}$ — индикаторная функция события $[\hat{x}_{ij}(t) > u_i]$.

Обозначим через $\hat{\xi}_i, \hat{\beta}_i$ оценки, полученные методом максимума правдоподобия для параметров ξ_i, β_i .

Этот метод хорошо работает, если $\xi_i > -1/2$. В этом случае можно показать, что

$$n^{1/2} \left(\hat{\xi}_i - \xi_i, \frac{\hat{\beta}_i}{\beta_i} - 1 \right) \xrightarrow{d} N(0, V^{-1}), \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$V^{-1} = (1 + \xi_i) \begin{pmatrix} 1 + \xi_i & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим метод взвешенных по вероятности моментов (ВВМ), который состоит в следующем: определенным образом взвешенные теоретические моменты некоторого параметрического распределения приравниваются к соответствующим взвешенным эмпирическим моментам, и в результате решения системы уравнений получаем ВВМ-оценки параметров распределения. Метод ВВМ зачастую дает лучшие оценки, чем стандартный метод моментов (ММ).

Предположим, что случайная величина $(X_{ij}(t) - u_i) \mathbf{1}_{[X_{ij}(t) > u_i]}$ имеет распределение $GPD_{\xi_i, \beta_i}(x)$. В таком случае

$$w_r = E \left[(X_{ij}(t) - u_i) \mathbf{1}_{[X_{ij}(t) > u_i]} \left(\overline{GPD}_{\xi_i, \beta_i}((X_{ij}(t) - u_i) \mathbf{1}_{[X_{ij}(t) > u_i]}) \right)^r \right] = \frac{\beta_i}{(r+1)(r+1-\xi_i)}, \quad (10)$$

где $r = 0, 1$; $\overline{GPD}_{\xi_i, \beta_i}(x) = 1 - GPD_{\xi_i, \beta_i}(x)$. Из выражений для теоретических взвешенных по вероятности моментов нулевого и первого порядков (w_0 и w_1 соответственно) мы можем выразить β_i и ξ_i :

$$\beta_i = \frac{2w_0 w_1}{w_0 - 2w_1} \quad \text{и} \quad \xi_i = 2 - \frac{w_0}{w_0 - 2w_1}.$$

Если в этих выражениях мы заменим теоретические взвешенные по вероятности моменты соответствующими эмпирическими моментами, определенными следующим образом:

$$w_r(\beta_i, \xi_i) = \frac{1}{N_{u_i, i}} \sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_i} (\hat{x}_{ij}(t) - u_i) \mathbf{1}_{[\hat{x}_{ij}(t) > u_i]} H^r((\hat{x}_{ij}(t) - u_i) \mathbf{1}_{[\hat{x}_{ij}(t) > u_i]}), \quad r = 0, 1,$$

где $N_{u_i, i} = \sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_i} \mathbf{1}_{[\hat{x}_{ij}(t) > u_i]}$, а $H(x)$ — эмпирическая функция распределения ненулевых превышений $(\hat{x}_{ij}(t) - u_i) \mathbf{1}_{[\hat{x}_{ij}(t) > u_i]}$, $t = 1, \dots, M$; $j = 1, \dots, \hat{n}_i$, то получим ВВМ-оценки для параметров β_i и ξ_i .

В статье [Hosking, Wallis (2007)] показано, что при $\xi_i \geq 0$ ВВМ-оценка ничем не уступает альтернативной оценке, полученной методом максимума правдоподобия.

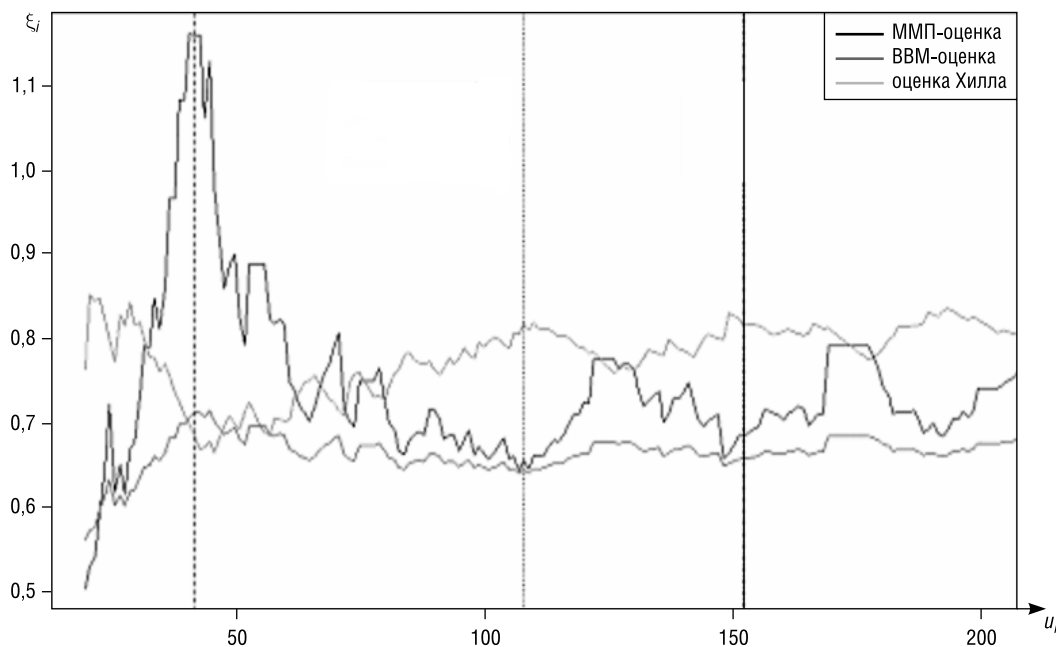


Рис. 3. Сравнительный анализ оценки, полученной методом максимума правдоподобия, ВВМ-оценки и оценки Хилла

В статье [Rachedi, Fantazzini (2008)] параметр ОРП ξ_i оценивается также с помощью оценки Хилла (для более детальной информации об этой непараметрической оценке см. [Cruz (2002)]). Чтобы выделить наилучшую процедуру оценивания параметра ξ_i , гарантирующую устойчивость его оценок, мы вычислили оценки ξ_i для разных пороговых уровней. Как видно из рис. 3, результаты эмпирического анализа для оценки ξ_i указывают на преимущество ВВМ-метода над методом максимума правдоподобия (ММП) и оценкой Хилла. Отметим устойчивость ВВМ-оценки для различных пороговых значений u_i .

3.5.3. Смешивание методом Монте-Карло

После того как построены модель частоты возникновения убытков и модель величины убытка, необходимо их смешать с помощью метода Монте-Карло, чтобы смоделировать новую серию агрегированных убытков. Тогда при большом количестве данных мы сможем вычислить такие меры риска, как ГП и СОП.

Разумно предположить, что случайные величины $X_{i1}(t), \dots, X_{in_{it}}(t)$ ($X_{ij}(t)$ — j -й убыток i -го пересечения в период t) одинаково распределены. Обозначим $F_{Xt}(x) = P(X_{ij}(t) \leq x)$.

Функция распределения случайной суммы $S_{it} = X_{i1}(t) + X_{i2}(t) + \dots + X_{in_{it}}(t)$ равна

$$\begin{aligned} F_{S_{it}}(x) &= P(S_{it} \leq x) = \\ &= \sum_{n_{it}=0}^{\infty} p_{n_{it}} P(S_{it} \leq x | n_{it}) = \\ &= \sum_{n_{it}=0}^{\infty} p_{n_{it}} F_{Xt}^{*n_{it}}(x), \end{aligned}$$

где $F_{Xt}^{*n_{it}}(\cdot)$ — свертка функций распределения случайных величин $X_{i1}(t), \dots, X_{in_{it}}(t)$.

Следовательно, функция распределения смеси частот и величин убытков равна сумме сверток функций распределения величин убытков. Отсюда получаем, что плотность с.в. S_{it} равна

$$f_{S_{it}}(x) = \sum_{n_{it}=0}^{\infty} p_{n_{it}} f_{X_{it}}^{*n_{it}}(x).$$

Однако получение аналитического представления для распределения $F_{S_{it}}$ — вычислительно весьма сложная (иногда неразрешимая) задача. В силу этого мы предпочитаем приближать это распределение методом Монте-Карло.

В предположении независимости операционных убытков приведем подробное описание **процедуры моделирования ГП и СОП суммарных операционных убытков с помощью метода Монте-Карло**:

1. Оценим маргинальную функцию распределения убытка $F_{S_{it}}(x)$ для каждого типа рискового события i , $i = 1, \dots, R$, следующим образом:

(а) В соответствии с функцией распределения частоты убытков i -го типа риска (пуассоновское или отрицательное биномиальное распределение) сгенерируем случайную величину n_{it} (обозначим сгенерированное значение через \hat{n}_{it}).

(б) Из функции распределения величины убытка i -го типа риска (экспоненциальное распределение, распределение Парето, гамма-распределение, ОРП) сгенерируем случайную величину x_{ij} (обозначим сгенерированное значение через \hat{x}_{ij} , $j = 1, \dots, \hat{n}_{it}$).

(с) Просуммировав \hat{n}_{it} значений, сгенерированных на предыдущем шаге, вычислим смоделированный суммарный убыток типа i .

(d) Повторим шаги (а)–(с) $N = 100\,000$ раз.

(е) Отсортировав по возрастанию $100\,000$ значений суммарных убытков, полученных на предыдущем шаге, сгенерируем функцию распределения суммарного убытка i -го типа $F_{S_{it}}(x)$.

2. Для каждого типа рискового события i , используя сгенерированную функцию распределения суммарного убытка $F_{S_{it}}(x)$, вычислим ГП и СОП необходимого доверительного уровня.

3. Наконец, вычислим совокупную(ое) ГП (СОП) как сумму всех ГП (СОП) для каждого типа рискового события i .

3.6. Каноническая агрегация с помощью копула-функций

Для финансовых организаций, не способных оценить зависимости между ТС (или БН), Второе Базельское соглашение требует реализации весьма консервативного подхода. Вместе с тем, связь между суммарными операционными убытками различных БН отнюдь не описывается комонотонной зависимостью. Это обстоятельство предоставляет нам широкие возможности диверсификации и получения меньшего по величине и более эффективного резервного капитала.

В этом разделе рассмотрим, как может быть использована копула-функция для описания структуры зависимости между суммарными убытками $(S_{it})_{i=1}^R$. Отметим, что ее использование

приводит к уменьшению величины полной ГП (см. [Di Clemente, Romano (2004)], [Fantazzini, Dalla Valle et al. (2007)], [Fantazzini (2008a)]).

Теорема Шкляра (см. [Sklar (1959)]) утверждает, что совместное распределение H вектора суммарных убытков S_{it} , $i = 1, \dots, R$; $t = 1, \dots, M$, может быть представлено как копула-функция от маргинальных функций распределения компонент вектора:

$$P(S_{1t} \leq x_{1t}, \dots, S_{Rt} \leq x_{Rt}) = H(x_{1t}, \dots, x_{Rt}) = C(F_{S_{1t}}(x_{1t}), \dots, F_{S_{Rt}}(x_{Rt})), \quad (11)$$

где $F_{S_{it}}(\cdot)$ — функция распределения случайной величины S_{it} ; $C(\cdot)$ — копула-функция.

Каноническая агрегация с помощью копула-функций предполагает агрегацию убытков за какой-то временной период, после чего оценивается зависимость этих суммарных убытков S_{it} , $i = 1, \dots, R$, с помощью копула-функции. Таким образом, мы можем изучать недельные, месячные или годовые суммарные убытки в зависимости от информации, представленной в базе данных по операционным убыткам, и от поставленных задач.

Для описания зависимости суммарных убытков обычно используют либо нормальную копула-функцию, либо Т-копула-функцию, плотности которых представлены ниже. Так, для нормальной копула-функции

$$c^{Normal}(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \zeta'(\Sigma^{-1} - I)\zeta\right), \quad (12)$$

где $\zeta = (x_1, \dots, x_n)'$; $u_i = \Phi(x_i)$, $\Phi(\cdot)$ — гауссовская функция распределения, $\Phi^{-1}(\cdot)$ — обобщенное обращение⁴ гауссовского распределения; Σ — корреляционная матрица; I — единичная матрица размера n .

Для Т-копула-функции имеем

$$c^{Student's}(u_1, \dots, u_n) = |\Sigma|^{-1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{v+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)} \right]^n \frac{\left(1 + \frac{\zeta' \Sigma^{-1} \zeta}{v}\right)^{-\frac{v+n}{2}}}{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\zeta_i^2}{2}\right)^{-\frac{v+1}{2}}}, \quad (13)$$

где $\zeta = (x_1, \dots, x_n)'$; $u_i = t_v(x_i)$, $t_v(\cdot)$ — t -распределение с v степенями свободы, $t_v^{-1}(\cdot)$ — обобщенное обращение t -распределения с v степенями свободы; Σ — корреляционная матрица.

Обе эти копула-функции принадлежат классу эллиптических копула-функций (для более подробной информации см. [Cherubini, Luciano (2002)]). Альтернативным классу эллиптических копула-функций является класс архимедовых копула-функций. Однако использование представителей этого класса имеет существенное ограничение: такие копула-функции моделируют только положительную зависимость (или только частичную отрицательную зависимость), в то время как их многомерные обобщения имеют ограничения на параметры дву-

⁴ Если нам дана некоторая функция $F(\cdot)$, то ее обобщенным обращением называется функция $F^{-1}(u) = \inf\{y: F(y) \geq u\}$. Далее везде через $F^{-1}(\cdot)$ будем обозначать обобщенное обращение функции $F(\cdot)$.

мерной зависимости. Вот почему архимедовы копула-функции не используются при описании операционного риска.

Аналитическое представление многомерной функции всех суммарных убытков S_{it} с помощью копула-функции невозможно, поэтому необходимо приближенное решение, которое можно получить, например, методом Монте-Карло.

После того как оценены параметры копула-функции C и маргинальных функций распределения $F_{S_{it}}$, $i = 1, \dots, R$, моделируем многомерный случайный вектор длины R , имеющий функцию распределения, представимую как копула-функция C от равномерных на отрезке $[0; 1]$ распределений. Далее, значение i -й компоненты, $i = 1, \dots, R$, полученного вектора заменяем значением функции, обратной к маргинальной функции распределения $F_{S_{it}}$ этой компоненты. Если маргинальная функция распределения $F_{S_{it}}$, $i = 1, \dots, R$, оценена методом Монте-Карло, то эта функция-оценка разрывна (имеет скачки), и мы должны использовать понятие обобщенного обращения функции. После чего просуммируем все компоненты преобразованного вектора и получим смоделированный суммарный по всем БН и ТС убыток. Наконец, повторим последние три шага большое количество раз и вычислим значения требуемых мер риска (например, ГП, СОП).

Опишем более подробно **процедуру расчета резервного капитала**:

1. Оценим маргинальную функцию распределения $F_{S_{it}}$ суммарных убытков i -го типа за период t для каждого $i = 1, \dots, R$ следующим образом:

(а) Подберем функцию распределения частоты убытков (пуассоновское или отрицательное биномиальное распределение) и функцию распределения величины убытков (экспоненциальное распределение, распределение Парето, гамма-распределение, ОРП).

(б) В соответствии с функцией распределения частоты убытков i -го типа сгенерируем случайную величину n_{it} (обозначим сгенерированное значение через \hat{n}_{it}).

(с) Из функции распределения убытка i -го типа сгенерируем \hat{n}_{it} значений.

(д) Просуммировав \hat{n}_{it} значений, сгенерированных на предыдущем шаге, вычислим смоделированный суммарный убыток типа i .

(е) Повторим шаги (б)–(д) $N = 100\,000$ раз.

(ф) Отсортировав по возрастанию $100\,000$ значений суммарных убытков, полученных на предыдущем шаге, сгенерируем функцию распределения суммарного убытка i -го типа $F_{S_{it}}(x)$.

2. Смоделируем многомерный вектор суммарных убытков S_{it} , $i = 1, \dots, R$, и оценим кумулятивную функцию распределения совокупного убытка следующим образом:

(а) Подберем для кумулятивных функций распределения суммарных убытков $F_{S_{it}}$ копула-функцию C .

(б) Сгенерируем случайный многомерный вектор (u_1, \dots, u_R) , функция распределения которого представима в виде копула-функции C от равномерных на отрезке $[0; 1]$ распределений.

(с) Взяв $F_{S_{it}}^{-1}(u_i)$, получим сгенерированный суммарный убыток для i -го пересечения, $i = 1, \dots, R$.

(d) Сложив смоделированные суммарные убытки S_{it} по всем пересечениям i , $i = 1, \dots, R$, получим совокупный по всем БН и ТС убыток.

(e) Повторим шаги (b)–(d) $N = 100\,000$ раз.

(f) Отсортировав по возрастанию 100 000 значений смоделированных совокупных убытков, полученных на предыдущем шаге, сгенерируем функцию распределения совокупного по всем БН и ТС убытка.

3. Вычислим ГП (или СОП):

(a) ГП 99%-го доверительного уровня равна 1000-му элементу упорядоченной по возрастанию последовательности 100 000 значений совокупных убытков (см. шаг 2.(f));

(b) СОП 99%-го доверительного уровня равно среднему первых 1000 элементов упорядоченной по возрастанию последовательности 100 000 значений совокупных убытков (см. шаг 2.(f)).

3.7. Пуассоновская модель шоков

В этом разделе мы представим модель агрегации, предложенную в работах [Lindskog, McNeil (2003)], [Embrechts, Puccetti (2007)] и [Fantazzini, Dalla Valle et al. (2008)], в которой моделируется зависимость как между суммарными убытками, так и, с помощью пуассоновского процесса, между частотами убытков разного типа.

Предположим, что мы имеем m разных типов шоков или событий. Обозначим через n_t^e , $e = 1, \dots, m$, пуассоновский процесс с интенсивностью λ^e , описывающий количество реализованных событий типа e на промежутке времени $(0; t]$. Далее, предположим, что эти процессы независимы. Рассмотрим убытки R различных типов, и пусть n_{it} , $i = 1, \dots, R$, обозначает частоту убытков i -го типа на промежутке времени $(0; t]$.

Для r -й реализации события типа e определим бернуллиевскую случайную величину I_{ir}^e , которая равна единице, если мы наблюдаем убыток типа i , и нулю — в противном случае. Векторы

$$\mathbf{I}_r^e = (I_{1r}^e, \dots, I_{Rr}^e)', \quad r = 1, \dots, n_t^e,$$

предполагаются независимыми и одинаково распределенными, имеющими многомерное распределение Бернулли⁵. Другими словами, каждое новое событие дает новую независимую возможность возникновения убытков, но фиксированному событию отвечают бернуллиевские случайные величины, характеризующие реализацию убытков того или иного типа, которые могут быть зависимыми. Форма зависимости определяется спецификацией многомерного распределения Бернулли, а независимость этих случайных величин — частный случай этой спецификации.

В соответствии с пуассоновской моделью шоков, частота убытков i -го типа n_{it} имеет пуассоновское распределение, поскольку она образуется в результате суперпозиции m независимых пуассоновских процессов, порожденных m типами определяющих событий. Распределение вектора (n_{1t}, \dots, n_{Rt}) будем называть *многомерным пуассоновским распреде-*

⁵ Распределение случайного вектора (I_1, \dots, I_N) , i -я компонента которого принимает значение 0 или 1, $i = 1, \dots, N$, будем называть *многомерным распределением Бернулли*.

лением. Однако суммарное число убытков — это не обычный, а сложный пуассоновский процесс:

$$n_t = \sum_{e=1}^m \sum_{r=1}^{n_t^e} \sum_{i=1}^R I_{ir}^e.$$

В каждом i -м пересечении БН/ТС шоки вызывают убытки X_{ir}^e , $r = 1, \dots, n_t^e$, где X_{ir}^e — взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения F_{it} и независимые от n_t^e .

Как можно понять из предыдущих рассуждений, ключевой момент этого подхода — *идентификация m определяющих пуассоновских процессов*. К сожалению, эта область исследования возникла совсем недавно и требует более детального изучения. Простым подходом идентификации m определяющих процессов с R типами рисков является подход, аналогичный стандартному РУ-подходу. Хотя положительная/отрицательная зависимость⁶ как между шоками (n_{it}), так и между величинами суммарных убытков (S_{ij}) допускается, число шоков и величины убытков предполагаются независимыми:

$$\begin{aligned} H_{n_{1t}, \dots, n_{Rt}}(x_1, \dots, x_R) &= C^f(F_{n_{1t}}(x_1), \dots, F_{n_{Rt}}(x_R)), \\ H_{s_{1t}, \dots, s_{Rt}}(x_1, \dots, x_R) &= C^s(F_{s_{1t}}(x_1), \dots, F_{s_{Rt}}(x_R)), \\ H_{n_{1t}, \dots, n_{Rt}} &\perp H_{s_{1t}, \dots, s_{Rt}}, \end{aligned}$$

где $H_{n_{1t}, \dots, n_{Rt}}(\cdot)$ — функция распределения случайного вектора (n_{1t}, \dots, n_{Rt}) , $F_{n_{it}}$ — функция распределения случайной величины n_{it} , а $C^f(\cdot)$ — копула-функция многомерной функции распределения $H_{n_{1t}, \dots, n_{Rt}}$; $H_{s_{1t}, \dots, s_{Rt}}(\cdot)$ — функция распределения случайного вектора (s_{1t}, \dots, s_{Rt}) , $F_{s_{it}}$ — функция распределения случайной величины s_{it} , а $C^s(\cdot)$ — копула-функция многомерной функции распределения $H_{s_{1t}, \dots, s_{Rt}}$; знак \perp обозначает независимость случайных векторов.

Если же вместо суммарного убытка за период мы используем средний убыток за период (т. е. s_{it} вместо S_{it}), то

$$\begin{aligned} H_{n_{1t}, \dots, n_{Rt}}(x_1, \dots, x_R) &= C^f(F_{n_{1t}}(x_1), \dots, F_{n_{Rt}}(x_R)), \\ H_{s_{1t}, \dots, s_{Rt}}(x_1, \dots, x_R) &= C^s(F_{s_{1t}}(x_1), \dots, F_{s_{Rt}}(x_R)), \\ H_{n_{1t}, \dots, n_{Rt}} &\perp H_{s_{1t}, \dots, s_{Rt}}, \end{aligned}$$

где $H_{s_{1t}, \dots, s_{Rt}}(\cdot)$ — функция распределения случайного вектора (s_{1t}, \dots, s_{Rt}) , $F_{s_{it}}(\cdot)$ — функция распределения случайной величины s_{it} , а $C^s(\cdot)$ — копула-функция многомерной функции распределения $H_{s_{1t}, \dots, s_{Rt}}$.

Приведем **процедуру реализации этого подхода**:

1. Для каждого пересечения БН/ТС подберем функцию распределения частоты убытков и функцию распределения величины убытков, как это делалось при стандартном РУ-подходе.

⁶ Случайные величины X_1, X_2 называются *положительно зависимыми*, если

$$P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \geq P(X_1 > x_1)P(X_2 > x_2),$$

соответственно, *отрицательно зависимыми*, если

$$P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \leq P(X_1 > x_1)P(X_2 > x_2).$$

2. Подберем для функции распределения вектора частот убытков (n_{1t}, \dots, n_{Rt}) копула-функцию C^f (см. дополнение к этому разделу).

3. Оценим маргинальные функции распределения $F_{S_{it}}$ суммарных убытков i -го типа, $i = 1, \dots, R$, за период t следующим образом:

(а) Сгенерируем случайный вектор $u^f = (u_{1t}^f, \dots, u_{Rt}^f)$, функция распределения которого представима в виде копула-функции C^f от равномерных на отрезке $[0; 1]$ распределений.

(б) Взяв $F_{n_{it}}^{-1}(u_{it}^f)$, получим сгенерированный вектор частот убытков (n_{1t}, \dots, n_{Rt}) , описывающий число наблюдаемых убытков каждого из R типов риска (обозначим этот вектор через $(\hat{n}_{1t}, \dots, \hat{n}_{Rt})$).

(с) Для каждого типа риска $i, i = 1, \dots, R$, сгенерируем \hat{n}_{it} значений из функции распределения убытка i -го типа.

(d) Просуммировав для каждого типа риска $i, i = 1, \dots, R$, \hat{n}_{it} значений, сгенерированных на предыдущем шаге, вычислим смоделированный суммарный убыток типа i .

(е) Повторим шаги (а)–(d) $N = 100\,000$ раз.

(f) Для каждого типа риска $i, i = 1, \dots, R$, отсортировав по возрастанию $100\,000$ значений суммарных убытков, полученных на предыдущем шаге, сгенерируем функцию распределения суммарного убытка $F_{S_{it}}(x)$.

4. Подберем для функций распределения вектора суммарных убытков (S_{1t}, \dots, S_{Rt}) копула-функцию C^s .

5. Сгенерируем случайный вектор $u^s = (u_1^s, \dots, u_R^s)$, функция распределения которого представима в виде копула-функции C^s от равномерных на отрезке $[0; 1]$ распределений.

6. Взяв вектор $(F_{S_{1t}}^{-1}(u_1^s), \dots, F_{S_{Rt}}^{-1}(u_R^s))$, получим сгенерированный вектор суммарных убытков.

7. Повторим предыдущие шаги $N = 100\,000$ раз.

Таким образом можно смоделировать новые векторы суммарных убытков, которые затем могут быть использованы для вычисления мер риска совокупного убытка (например, ГП и СОП).

Дополнение: оценка копула-функций многомерных функций распределения с дискретными маргинальными функциями распределения.

Согласно результатам, представленным в работе [Sklar (1959)], в случае, если некоторые маргинальные функции многомерной функции распределения дискретны (как в нашем случае), то копула-функция для такого распределения определена не единственным образом. Для преодоления этой проблемы было предложено два метода. Первый метод, описанный в работе [Cameron, Li et al. (2004)], основан на *конечно-разностной аппроксимации производных копула-функции*:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \Delta_n \dots \Delta_1 C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)),$$

где $F_{X_i}(\cdot)$ — функция распределения случайной величины $X_i, i = 1, \dots, n$; $C(\cdot)$ — копула-функция; $\Delta_k, k = 1, \dots, n$, обозначает k -ю компоненту разностного оператора первого порядка, которая определяется следующим образом:

$$\Delta_k C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_k}(x_k), \dots, F_{X_n}(x_n)) = C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_k}(x_k), \dots, F_{X_n}(x_n)) - C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_k}(x_k - 1), \dots, F_{X_n}(x_n)).$$

Второй метод — это метод «онепрерывнивания», предложенный в работах [Stevens (1950)], [Denuit, Lambert (2005)]. Этот метод основан на генерации искусственных случайных величин X_1^*, \dots, X_n^* , получающихся путем прибавления независимых случайных величин u_1, \dots, u_n (каждая из которых имеет равномерное распределение на отрезке $[0; 1]$) к дискретным случайным величинам X_1, \dots, X_n . Отметим, что такой метод не меняет значение меры согласованности между переменными⁷.

Эмпирические исследования показывают, что максимизация функции правдоподобия с маргинальными дискретными распределениями часто приводит к вычислительным трудностям, являющимся следствием отсутствия сходимости алгоритма максимизации. В таких случаях может оказаться полезным сначала использовать дискретные случайные величины X_1^*, \dots, X_n^* , а затем модель, основанную на копула-функциях для непрерывных случайных величин. Вот почему мы рекомендуем полагаться на второй метод.

3.8. Байесовский подход: байесовские маргинальные функции и копула-функции в задачах управления операционным риском

В связи с относительно недавним возникновением понятий операционного риска и управления операционным риском существенным ограничением усовершенствованных моделей измерения риска (УМИР-подход) является наличие неточных данных или/и их малое количество. Поскольку финансовые учреждения приступили к сбору данных по операционным убыткам всего лишь несколько лет назад, это делает задачу исследования операционных рисков еще более сложной. В этом контексте использование байесовских методов и методов стохастического моделирования — вполне естественное решение указанной проблемы. В самом деле, эти методы позволяют нам сочетать количественную информацию (данные по операционным убыткам, накопленные банком) и качественные данные (мнения экспертов), учитывая форму априорной информации. Кроме того, методы стохастического моделирования — это широко используемый статистический инструмент, позволяющий преодолеть некоторые вычислительные проблемы. Сочетание описанных методологий приводит к методам Монте-Карло для цепей Маркова (ММКЦМ), которые включают в себя основные преимущества как байесовских методов, так и методов стохастического моделирования.

В следующих разделах рассмотрим байесовский подход для маргинальных функций распределения убытка, предложенный в работе [Dalla Valle, Giudici (2008)], и байесовские копула-функции, предложенные в работе [Dalla Valle (2008)]. В конечном итоге, для того чтобы представить подход полного байесовского мета-распределения для управления операционным риском, мы объединим эти две методологии.

3.8.1. Байесовские маргинальные функции

Идея, лежащая в основе подхода, предложенного в работе [Dalla Valle, Giudici (2008)], состоит в том, чтобы оценивать параметры маргинальных распределений убытков не только с помощью классического подхода, но и с помощью байесовского подхода, с использовани-

⁷ Мерой согласованности случайных величин X_1, X_2 , имеющих функции распределения F_1 и F_2 соответственно, называют величину $P((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) > 0) - P((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) < 0)$, где \tilde{X}_1, \tilde{X}_2 — независимые случайные величины с функциями распределения F_1 и F_2 соответственно.

ем метода Монте-Карло для цепей Маркова. Как и ранее, конечная цель — получить путем моделирования функцию распределения совокупного убытка и вычислить меру риска совокупного убытка.

Рассмотрим подробно байесовский подход на двух примерах:

- 1) частота убытков моделируется пуассоновским распределением, величины убытков — экспоненциальным распределением;
- 2) частота убытков моделируется пуассоновским распределением, величины убытков — гамма-распределением.

Пусть для i -го пересечения БН/ТС частота убытков имеет пуассоновское распределение с параметром λ_i , а величины убытков — экспоненциальное распределение с параметром $\lambda_i^{(s)}$. Тогда функция правдоподобия (4) примет вид

$$L(\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{n}}_i | \lambda_i^{(s)}, \lambda_i) = \prod_{t=1}^M \left[\prod_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \frac{1}{\lambda_i^{(s)}} e^{-\frac{1}{\lambda_i^{(s)}} \hat{x}_{ij}(t)} \right] \frac{\lambda_i^{\hat{n}_{it}} e^{-\lambda_i}}{\hat{n}_{it}!}. \quad (14)$$

Если использовать обозначение $\theta_i = 1/\lambda_i^{(s)}$, то получим такое же выражение для функции правдоподобия, как и в работе [Dalla Valle, Giudici (2008)]. Предположим, что параметры λ_i и θ_i — случайные величины. Выберем для каждой из них сопряженную априорную функцию распределения, т. е. функцию распределения, апостериорная функция которой принадлежит тому же классу, что и априорная функция распределения. В частности, можно выбрать априорные распределения

$$\begin{aligned} \lambda_i &\in \Gamma(a, b), \\ \theta_i &\in \Gamma(c, d), \end{aligned}$$

где знак \in определяет, что соответствующая случайная величина подчиняется указанному справа закону распределения вероятностей, а a, b, c, d — параметры априорного распределения.

Если у нас нет априорной информации относительно некоторого параметра модели, то это может быть отражено в априорной функции распределения при достаточно большом значении дисперсии параметра. В этом случае можно, например, предложить использование плоских априорных распределений, которые придают равные вероятности всем возможным значениям параметра. Однако этот подход имеет ряд недостатков. Например, для плоских априорных распределений в некоторых случаях не выполняется условие нормировки⁸, и они инвариантны относительно репараметризации модели (см. [Brooks (1997)]). Если условие нормировки для априорных распределений не выполнено, это может привести к тому,

⁸ Под условием нормировки для дискретной случайной величины подразумевается предписываемое теорией вероятностей условие, чтобы сумма вероятностей всевозможных исходов этой случайной величины равнялась единице; под условием нормировки для непрерывной случайной величины, функция распределения которой имеет плотность, подразумевается равенство единице интеграла по множеству всевозможных исходов этой случайной величины от ее плотности. Более подробную информацию о байесовском подходе и априорных распределениях, отражающих «скудность априорных знаний», читатель может найти, например, в статье С. А. Айвазяна, помещенной в разделе «Консультации» нашего журнала № 1(8) за 2008 год.

что апостериорные распределения не будут иметь среднего (см. [Gamerman (1997)]). Одним из решений этой проблемы является использование *слабых априорных распределений*, для которых выполняется условие нормировки и которые имеют достаточно большую дисперсию.

Следуя этому подходу, мы можем вычислить гиперпараметры априорного распределения параметра, приравняв математическое ожидание параметра, имеющего заданное априорное распределение, к его оценке, полученной методом максимального правдоподобия (при использовании которого параметры предполагаются константами), и положив дисперсию этого параметра равной очень большому числу (например, 1000).

Например, вычислим оценки гиперпараметров a и b априорной функции распределения параметра λ_i , рассматривая данные по операционным убыткам первого пересечения, представленные в работе [Dalla Valle, Giudici (2008)]. Оценка максимума правдоподобия для параметра λ_i равна 1,4028. Приравнявая это значение к математическому ожиданию этого параметра в предположении, что он имеет априорное распределение $\Gamma(a, b)$, а дисперсию этого параметра к 1000 ($E(\lambda_i) = 1,4028$, $V(\lambda_i) = 1000$), получаем следующие оценки параметров a и b : $\hat{a} = 0,0019$, $\hat{b} = 0,0014$.

В дальнейшем при анализе равенств, справедливых с точностью до нормирующей константы, будем использовать знак « \sim ».

В соответствии с теоремой Байеса, условное апостериорное распределение параметра λ_i с точностью до нормирующей константы равно априорному распределению, умноженному на функцию правдоподобия. Откуда получаем, что апостериорное распределение снова равно гамма-распределению, но уже с функцией плотности

$$\pi_{\lambda_i}(\cdot | \hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{n}}_i, \theta_i) \sim \Gamma\left(\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it} + a; M + b\right),$$

а апостериорное распределение для параметра θ_i снова совпадает с гамма-распределением, но с плотностью

$$\pi_{\theta_i}(\cdot | \hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{n}}_i, \lambda_i) \sim \Gamma\left(\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it} + c; \sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{ij}(t) + d\right).$$

Пусть для i -го пересечения БН/ТС частота убытков имеет, как и ранее, пуассоновское распределение с параметром λ_i , но величины убытков теперь имеют гамма-распределение с параметрами α_i , ϑ_i ($\Gamma(\alpha_i, \vartheta_i)$). Тогда функция правдоподобия (4) примет вид

$$L(\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{n}}_i | \alpha_i, \vartheta_i, \lambda_i) = \prod_{t=1}^M \left[\prod_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \frac{(1/\vartheta_i)^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i)} \hat{x}_{ij}^{\alpha_i-1}(t) e^{-\hat{x}_{ij}(t)/\vartheta_i} \right] \frac{\lambda_i^{\hat{n}_{it}} e^{-\lambda_i}}{\hat{n}_{it}!}. \quad (15)$$

Введем обозначение $\beta_i = 1/\vartheta_i$ и выберем независимые сопряженные априорные функции для параметров λ_i и β_i . Возьмем

$$\begin{aligned} \lambda_i &\in \Gamma(a, b), \\ \beta_i &\in \Gamma(c, d). \end{aligned}$$

Аналогично случаю, рассмотренному ранее (когда частота убытков имеет пуассоновское распределение, а величины убытков — экспоненциальное), можем снова выбрать *слабые*

априорные распределения, для которых выполняется условие нормировки и которые имеют достаточно большую дисперсию. Следуя этому подходу, вычислим гиперпараметры априорного распределения параметра, приравняв математическое ожидание этого параметра, в предположении, что он имеет заданное априорное распределение, к его оценке, полученной методом максимума правдоподобия (при использовании которого параметры предполагаются константами), и положив дисперсию этого параметра равной очень большому числу (например, 1000).

Воспользовавшись теоремой Байеса, вычислим апостериорную плотность параметра λ_i :

$$\pi_{\lambda_i}(\cdot | \hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{n}}_i; \alpha_i, \beta_i) \sim \Gamma\left(\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it} + a; M + b\right).$$

Аналогично вычислим апостериорную плотность параметра β_i :

$$\pi_{\beta_i}(\cdot | \hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{n}}_i; \alpha_i, \lambda_i) \sim \Gamma\left(\alpha_i \sum_{t=1}^M \hat{n}_{it} + c; \sum_{t=1}^M \sum_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{ij}(t) + d\right).$$

Если в качестве априорного распределения параметра α_i взять гамма-распределение:

$$\alpha_i \in \Gamma(e, f)$$

с параметрами e, f , то апостериорная плотность параметра α_i будет равна

$$\pi_{\alpha_i}(y | \hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{n}}_i; \beta_i, \lambda_i) \sim y^{e-1} \exp(-fy) \frac{\beta_i^{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}}}{\Gamma(y)} \prod_{t=1}^M \prod_{j=1}^{\hat{n}_{it}} \hat{x}_{ij}^{y-1}(t).$$

Заметим, что в отличие от апостериорных плотностей параметров β_i, λ_i апостериорная плотность параметра α_i не принимает ни одну из стандартных форм. По этой причине для моделирования функции распределения с плотностью $\pi_{\alpha_i}(\cdot | \hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{n}}_i; \beta_i, \lambda_i)$ воспользуемся одним из алгоритмов типа ММКЦМ, а именно алгоритмом Метрополиса–Хестинга.

Обозначим через $q(\cdot | z)$ плотность равномерного распределения на отрезке $[z - 0,25; z + 0,25]$.

Опишем **алгоритм Метрополиса–Хестинга** для нашего случая.

1. Возьмем некоторое начальное значение θ^0 из области определения $\pi_{\alpha_i}(\cdot | \hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{n}}_i; \beta_i, \lambda_i)$.
2. Смоделируем случайную величину, равномерно распределенную на отрезке $[\theta^0 - 0,25; \theta^0 + 0,25]$ (обозначим ее через $\hat{\varphi}$).
3. Вычислим величину

$$\begin{aligned} \alpha(\theta^0, \hat{\varphi}) &= \min \left(1, \frac{\pi_{\alpha_i}(\hat{\varphi} | \hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{n}}_i; \beta_i, \lambda_i) q(\theta^0 | \hat{\varphi})}{\pi_{\alpha_i}(\theta^0 | \hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{n}}_i; \beta_i, \lambda_i) q(\hat{\varphi} | \theta^0)} \right) = \\ &= \min \left(1, \prod_{t=1}^M \prod_{j=1}^{\hat{n}_{it}} (\hat{x}_{ij}(t))^{\hat{\varphi} - \theta^0} \left[\frac{\beta_i^{\hat{\varphi} - \theta^0}}{\Gamma(\hat{\varphi}) \Gamma(\theta^0)^{-1}} \right]^{\sum_{t=1}^M \hat{n}_{it}} \left[\frac{\hat{\varphi}}{\theta^0} \right]^{e-1} \exp[-f(\hat{\varphi} - \theta^0)] \right). \quad (16) \end{aligned}$$

(a) Если $\alpha(\theta^0, \hat{\varphi}) \geq 1$, то полагаем $\theta^1 = \hat{\varphi}$.

(b) Если $\alpha(\theta^0, \hat{\varphi}) < 1$, то с вероятностью $\alpha(\theta^0, \hat{\varphi})$ полагаем $\theta^1 = \hat{\varphi}$, а с вероятностью $1 - \alpha(\theta^0, \hat{\varphi})$ полагаем $\theta^1 = \theta^0$.

4. Повторим N раз шаги 1–3, беря вместо θ^0 смоделированные $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^N$.

При некоторых условиях регулярности эмпирическая функция распределения последовательности $\{\theta^t\}$ сходится по вероятности к функции распределения, имеющей плотность $\pi_{\alpha_i}(\cdot | \hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{n}}_i; \beta_i, \lambda_i)$ (см. [Gelman et al. (2004)]).

Реализация этого алгоритма требует вычисления значения функции (14) в точках φ и θ^t и моделирования случайных величин с равномерным распределением.

Нормирующая константа для апостериорной плотности не требуется, так как в алгоритме используются только отношения значений плотности в соответствующих точках.

Мы не будем здесь рассматривать случай, когда частоты имеют отрицательное биномиальное распределение, а величины убытков — распределение Парето, поскольку, как показано в работе [Fantazzini, Dalla Valle et al. (2008)], в ситуации, когда выборка достаточно мала, мы сталкиваемся с проблемой точности оценок. Кроме того, использование байесовского подхода для этих распределений может привести к нереалистичным значениям оценок мер риска ГП/СОП, а также к численным ошибкам (см. табл. 12–14 в работе [Dalla Valle, Giudici (2008)], из которых видно, что оценки для СОП больше e^{+27}).

3.8.2. Байесовские копула-функции

В работе [Dalla Valle (2008)] представлен РУ-подход с использованием байесовских копула-функций. В байесовском подходе нам необходимо апостериорное распределение, которое с точностью до нормирующего множителя равно произведению априорной функции распределения на функцию правдоподобия.

Используя плотность *нормальной копула-функции*, можно вычислить функцию правдоподобия, которая имеет следующий вид:

$$f(\hat{\mathbf{S}}|\Sigma) = |\Sigma|^{-\frac{M}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^M \hat{\mathbf{S}}'_t (\Sigma^{-1} - I_R) \hat{\mathbf{S}}_t \right\},$$

где $\hat{\mathbf{S}}_t = (\hat{S}_{1t}, \dots, \hat{S}_{Rt})$ — суммарный убыток i -го типа за период t , а $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{\mathbf{S}}_1, \dots, \hat{\mathbf{S}}_M)$.

Здесь нам необходимо оценить корреляционную матрицу Σ , и в работе [Dalla Valle (2008)] для этого в качестве априорного сопряженного распределения этого параметра выбрано **обратное распределение Уишарта**:

$$\Sigma \sim \text{InverseWishart}(\alpha, \mathbf{B}).$$

Распределение Уишарта является обобщением одномерного χ^2 -распределения на случай большей размерности. Как правило, оно используется для описания функции распределения симметричных положительно-полуопределенных матриц (обычно ковариационных матриц, диагональные элементы которых — случайные величины с χ^2 -распределением, см. [Ripley (1987)]). Если случайная матрица имеет распределение Уишарта с параметрами

\mathbf{B}^{-1} и α , то обратная к ней случайная матрица имеет обратное распределение Уишарта с параметрами \mathbf{B} и α (см. [Kotz, Balakrishnan et al. (2000)]).

Если априорной информации у нас нет, то рекомендуется использовать *слабые априорные распределения*.

В работе [Dalla Valle (2008)] степени свободы α взяты равными $R + 1$, т. е. числу типов риска (числу пересечений БН/ТС) плюс один. Более того, в этой работе в качестве матрицы точности \mathbf{B} взята диагональная матрица, для которой

$$\mathbf{B} = \text{diag}(\gamma_i), \quad \gamma_i \in \Gamma(0,001; 0,001), \quad i = 1, \dots, R.$$

Таким образом, математическое ожидание случайной величины γ_i равно единице, а дисперсия очень велика по сравнению с математическим ожиданием и равна 1000. Для γ_i мы имеем слабое распределение. Апостериорное распределение случайной величины Σ вычисляется согласно теореме Байеса:

$$\begin{aligned} \pi_{\Sigma}(S|\hat{\mathbf{S}}) &\sim |S|^{-\frac{M}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^M \hat{\mathbf{S}}_t' (S^{-1} - I_R) \hat{\mathbf{S}}_t\right\} |S|^{-\alpha + \frac{R+1}{2}} \exp\{-\text{tr}(\mathbf{B}S^{-1})\} \sim \\ &\sim |S|^{-\left(\frac{M}{2} + \alpha\right) + \frac{R+1}{2}} \exp\left\{-\text{tr}\left[\left(\frac{1}{2} \sum_{t=1}^M \hat{\mathbf{S}}_t \hat{\mathbf{S}}_t' + \mathbf{B}\right)S^{-1}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, апостериорное распределение случайной матрицы Σ — это снова обратное распределение Уишарта:

$$\pi_{\Sigma}(\cdot|\hat{\mathbf{S}}) \sim \text{InverseWishart}\left(\frac{M}{2} + \alpha; \mathbf{B} + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^M \hat{\mathbf{S}}_t \hat{\mathbf{S}}_t'\right).$$

Для моделирования апостериорной функции распределения параметра Σ можно воспользоваться алгоритмом Метрополиса–Хестинга для многомерных величин, взяв в качестве начального значения в этом алгоритме оценку корреляционной матрицы, полученную методом максимума правдоподобия (как это делалось в работе [Brooks (1997)]). Смоделировав 100 000 (или больше) матриц из этого апостериорного распределения, используем их для вычисления мер риска ГП/СОП.

Мы не будем здесь рассматривать байесовскую Т-копула-функцию, поскольку при больших значениях степеней свободы (часто возникающих для данных по операционным убыткам) она дает нереалистичные оценки мер риска. Для более подробной информации об этих проблемах см. табл. 12 в работе [Dalla Valle (2008)].

3.8.3. Подход полного байесовского мета-распределения

Изложенные подходы могут быть объединены для получения полного байесовского подхода. Подробное описание этой **процедуры вычисления величины резервного капитала** выглядит следующим образом:

1. Для каждого пересечения БН/ТС подберем функцию распределения частоты убытков (пуассоновское или отрицательное биномиальное распределение) и функцию распределения убытка, как это делалось при стандартном РУ-подходе, и оценим маргинальные функции

распределения $F_{S_{it}}(x)$ суммарных убытков i -го типа за период t , $i = 1, \dots, R$. Для функций распределения вектора суммарных убытков (S_{1t}, \dots, S_{Rt}) с маргинальными функциями $F_{S_{it}}(x)$ подберем копула-функцию C^S . Оценки параметров маргинальных функций распределения и копула-функции, полученные методом максимума правдоподобия, далее будут использованы как отправные точки цепей, строящихся на следующих шагах.

2. Для каждого типа риска из апостериорного распределения параметров функции распределения частоты убытков смоделируем $N_1 = 100\,000$ значений.

3. Для каждого типа риска из апостериорного распределения параметров функции распределения величины убытка смоделируем $N_1 = 100\,000$ значений.

4. Смоделируем $N_1 = 100\,000$ значений параметров копула-функции, имеющих заданные апостериорные распределения.

5. Сгенерируем апостериорное распределение H_B совокупного убытка по всем типам риска i , $i = 1, \dots, R$. Для этого:

(а) Для каждого типа риска i , $i = 1, \dots, R$, смоделируем апостериорные распределения суммарных убытков $F_{S_{it}}^B$:

i. Сгенерируем значение из функции распределения частоты убытков i -го типа (с параметрами, рассчитанными на шаге 2). Обозначим сгенерированное значение через \hat{n}_{it} .

ii. Из апостериорного распределения, описывающего величину убытка (с параметрами, рассчитанными на шаге 3), сгенерируем \hat{n}_{it} значений.

iii. Просуммировав \hat{n}_{it} смоделированных на предыдущем шаге значений, вычислим смоделированный суммарный убыток типа i .

iv. Повторим шаги (i)–(iii) $N_2 = 100\,000$ раз (для тех же параметров маргинальных распределений).

v. Отсортировав $N_2 = 100\,000$ сгенерированных суммарных убытков по возрастанию, сгенерируем апостериорные распределения $F_{S_{it}}^B$.

(b) Сгенерируем случайный вектор u_1, \dots, u_R , функция распределения которого представлена в виде копула-функции C (параметры которой сгенерированы на шаге 4) от равномерных на отрезке $[0; 1]$ распределений.

(c) Взяв вектор $((F_{S_{1t}}^B)^{-1}(u_1^S), \dots, (F_{S_{Rt}}^B)^{-1}(u_R^S))$, получим сгенерированный вектор суммарных убытков.

(d) Сложив смоделированные суммарные убытки S_{it} по всем пересечениям i , $i = 1, \dots, R$, получим сгенерированный совокупный по всем БН и ТС убыток.

(e) Повторим шаги (a)–(d) $N_1 = 100\,000$ раз.

(f) Отсортировав по возрастанию $N_1 = 100\,000$ значений совокупного убытка, сгенерируем апостериорную функцию распределения H_B .

б. Как это делалось ранее, вычислим ГП и/или СОП.

Излишне говорить, что точность оценки апостериорного распределения совокупного убытка H_B увеличивается с ростом числа генераций N_1 и N_2 . Однако требуемая для этого вычислительная мощность может расти экспоненциально, что может привести к проблеме переполнения.

Если априорная информация отсутствует и мы пользуемся слабыми априорными распределениями, то используется несколько измененный алгоритм. Он дает менее точные оценки ГП и/или СОП, чем первый алгоритм, но в нем моделируется только N_1 случайных величин вместо $N_1 \times N_2$, что позволяет значительно сократить время работы.

3.9. Эмпирические приложения в пакете Gauss: случай комонотонных убытков и канонической агрегации с помощью копула-функций

Чтобы продемонстрировать некоторые из изложенных подходов, вычислим ГП и СОП для разных доверительных уровней, используя смоделированные данные, подобные тем, что применяются в работе [Fantazzini, Dalla Valle et al. (2008)]. Исходная база данных представляет собой информацию по операционным убыткам некоего банка (название которого не раскрывается) с января 1999-го по декабрь 2004 года, составленную из более чем 72 наблюдений. Общее число убытков за рассматриваемый период 407. Операционные убытки берутся из двух бизнес-направлений и четырех типов событий. Таким образом, мы имеем восемь возможных типов рисков (или пересечений). В целях соблюдения конфиденциальности сведений банк присвоил случайный индекс каждому из рассматриваемых бизнес-направлений и типов событий: однако связь между присвоенными и реальными индексами была сохранена.

Для описания каждого типа риска используем параметры пуассоновского и гамма-распределений, представленные в табл. 7, 8 работы [Fantazzini, Dalla Valle (2008)].

Мы получим маргинальные распределения суммарных убытков S_{it} для каждого пересечения БН/ТС с помощью свертки распределений частот убытков и их величин, которые будем аппроксимировать методом Монте-Карло. Затем вычислим ГП и СОП для 95%- и 99%-х доверительных уровней; их сумма по всем пересечениям i даст нам совокупные ГП и СОП для случая комонотонных убытков. Кроме того, вычислим совокупную ГП с помощью нормальной копула-функции, которая более реалистично моделирует зависимость между маргинальными суммарными убытками S_{it} , чем предположение о комонотонности убытков.

```
new;cls;
//Загрузка данных по операционным убыткам (8 пересечений БН/ТС)
perdite=0.00000000 123287.00 ...
//В целях экономии места полная таблица имеющихся данных здесь не представлена, но их можно получить
по запросу у автора
...
9876.000 1957.0000 0.00000000 ;
//Число сценариев
scenarios=100000;
//Загрузка параметров пуассоновского и гамма-распределений
parameters=1.4027778    0.15180904    64847.807,
                2.1944444    0.19869481    109320.57,
                0.083333333    0.20179152    759717.47,
                0.45833333    0.11280330    1827627.2,
                0.097222222    0.19542678    495700.99,
                0.62500000    0.38494011    19734.007,
                0.68055556    0.059798776    211098.10,
                0.11111111    0.26302912    135643.25;
```

```
//Инициализация матрицы, в которой будут представлены значения ГП, СОП, а также совокупный убыток
var95= zeros(rows(parameters),1);
var99= zeros(rows(parameters),1);
es95= zeros(rows(parameters),1);
es99= zeros(rows(parameters),1);
losstot= zeros(scenarios,rows(parameters));

//Оценка маргинальных распределений суммарных убытков  $F_{sit}$  для каждого типа риска  $i, i = 1, \dots, R$ 
for j(1,rows(parameters),1);
frequency1=zeros(scenarios,1);
loss1=zeros(scenarios,1);
for i(1,scenarios,1);

//Моделируем пуассоновскую случайную величину
frequency1[i,1]=rndp(1,1,parameters[j,1]);
aa=frequency1[i,1];
if aa == 0;
loss1[i,1]=0;
else;

//Моделируем случайную величину из гамма-распределения
severity=rndgam(aa,1,parameters[j,2])*parameters[j,3];
loss1[i,1]=sumc(severity);
endif;
endfor;

//Сортируя по возрастанию 100 000 сгенерированных суммарных убытков, генерируем распределение  $F_{sit}$ 
rankindex=rankindx(Loss1,1);
matrixrank=Loss1 rankindex;
finalsort1=sortc(matrixrank,2);
losstot[:,j]=finalsort1[:,1];
var95[j,1]=finalsort1[0.95*scenarios,1];
es95[j,1]=meanc(finalsort1[0.95*scenarios:rows(finalsort1),1]);
var99[j,1]=finalsort1[0.99*scenarios,1];
es99[j,1]=meanc(finalsort1[0.99*scenarios:rows(finalsort1),1]);
endfor;

//Вывод таблицы для значений мер риска по каждому типу риска  $i$  (пересечения БН/ТС)
print "VaR 95 % VaR 99 % ES 95 % ES 99 % для каждого типа риска i";
var95 var99 es95 es99;

//Вычисление мер риска в предположении комонотонности суммарных убытков: простая сумма ГП по всем
типам риска  $i$ 
var95_dip_perf=sumc(var95);
var99_dip_perf=sumc(var99);
es95_dip_perf=sumc(es95);
es99_dip_perf=sumc(es99);
print "VaR 95 % VaR 99 % ES 95 % ES 99 % (Perfect Dependence)";
var95_dip_perf var99_dip_perf es95_dip_perf es99_dip_perf;

//Генерация функции распределения суммарного убытка по каждому типу риска  $i$ 
cdf= zeros(rows(perdite),cols(perdite));
for j(1,cols(perdite),1);
for i(1,rows(perdite),1);
n=1; do while perdite[i,j] .> losstot[n,j];
if n<scenarios;
cdf[i,j]= n/scenarios;
else;
```



```

cdf[i,j]=1;
break;
endif;
n = n+1; endo;
endfor;
endfor;

//Оценка корреляционной матрицы нормальной копула-функции методом максимума правдоподобия
invcdf=cdfni(cdf);
corr_matrix=corr(x(invcd);
//Моделирование 100 000 случайных векторов из нормальной копула-функции
matrixR =corr_matrix;
randomunif=rndn(rows(parameters),scenarios);
xx = chol(matrixR)*randomunif;
uu = cdfn(xx)';

//Обращая с помощью функции  $F_{S_{it}}^{-1}$  вектор  $(u_1, \dots, u_R)$ , составленный из смоделированных случайных величин, имеющих равномерное распределение и зависимость которых описывается нормальной копула-функцией, моделируем суммарные убытки  $i$ -го типа
invtot= zeros(scenarios,rows(parameters));
for j(1,rows(parameters),1);
for i(1,scenarios,1);
aa= uu[i,j]*scenarios;
aa=ceil(aa);
invtot[i,j] = losstot[aa,j];
endfor;
endfor;

//Суммируя  $S_{it}$  по всем типам риска  $i$ , моделируем совокупный убыток
portsim=sumc(invtot');

//Сортируя по возрастанию 100 000 смоделированных совокупных убытков, генерируем функцию распределения совокупного убытка
rankindex = rankindx(portsim,1);
matrixrank=portsim rankindex;
portcop = sortc(matrixrank,2);

//Вычисляем ГП и СОП
var95=portcop[0.95*scenarios,1];
es95=meanc(portcop[0.95*scenarios:rows(portcop),1]);
var99=portcop[0.99*scenarios,1];
es99=meanc(portcop[0.99*scenarios:rows(portcop),1]);
print "VaR 95 % VaR 99 % ES 95 % ES 99 % (Нормальная копула-функция)";
var95: var99: es95: es99;

```

Поскольку мы использовали смоделированные данные, то должны получиться значения, близкие представленным в табл. 3.

Следует заметить, во-первых, что гипотеза о комонотонности убытков нереалистична, поскольку все корреляции близки к нулю, во-вторых, что использование копула-функций позволяет значительно сократить количество средств, выделяемых в качестве резервного капитала под операционные риски. Если мы сравним величину резервного капитала, полученную в предположении комонотонности убытков, и величину резервного капитала, полученную с использованием копула-функций, то увидим, что в последнем случае резервный капитал всегда меньше на 10–50%, чем в первом случае.

Таблица 3

Результаты оценок ГП и СОП

Тип риска <i>i</i>	ГП 95%	ГП 99%	СОП 95%	СОП 99%
1	74 528,044	158 972,50	127 410,69	215 643,86
2	209 042,19	372 002,60	311 679,27	480 297,24
3	3938,9093	375 488,17	247 692,28	867 696,32
4	52 2287,94	2 147 631,5	1 564 485,9	3 539 469,7
5	7973,9140	303 487,86	191 622,96	625 686,14
6	26 839,249	55 567,369	44 637,456	73 431,526
7	42 613,419	208 104,22	148 306,02	360 775,84
8	9223,3096	112 151,18	74 077,702	206 885,85
Совокупный риск в случае комонотонности	896 446,98	3 733 405,4	270 9912,3	6 369 886,5
Совокупный риск в случае использования нормальной копула-функции	812 585,45	2 388 738,8	1 809 044,9	3 713 432,1

Список литературы

- BIS. Basel Committee on Banking Supervision. The 2002 loss data collection exercise for operational risk: summary of the data collected. Bank for International Settlement document, 2003.
- Brooks S. P. Markov chain Monte Carlo method and its application // *The Statistician*. 1997. № 47 (1). P. 69–100.
- Cameron C., Li T., Trivedi P., Zimmer D. Modelling the Differences in Counted Outcomes Using Bivariate Copula Models with Application to Mismesured Counts // *Econometrics Journal*. 2004. № 7. P. 566–584.
- Cherubini U., Luciano E., Vecchiato. Copula Methods in Finance. The Wiley Finance Series, 2002.
- Choi I. Unit Root Tests for Panel Data // *Journal of International Money and Finance*. 2001. № 20. P. 249–272.
- Christoffersen P. Elements of Financial Risk Management. Academic Press, 2003.
- Cruz M. G. Modelling, Measuring and Hedging Operational Risk. New York: Wiley, 2002.
- Dalla Valle L., Giudici P. A Bayesian approach to estimate the marginal loss distributions in operational risk management // *Computational Statistics and Data Analysis*. 2008. № 52. P. 3107–3127.
- Dalla Valle L. Bayesian Copulae Distributions, with Application to Operational Risk Management // *Methodology and Computing in Applied Probability*. 2008. Forthcoming.
- Denuit M., Lambert P. Constraints on Concordance Measures in Bivariate Discrete Data // *Journal of Multivariate Analysis*. 2005. № 93. P. 40–57.
- Di Clemente A., Romano C. A Copula-Extreme Value Theory Approach for Modelling Operational Risk // In: M. G. Cruz (ed.), *Operational Risk Modelling and Analysis: Theory and Practice*, Risk Books, London, 2004.
- Embrechts P., Puccetti G. Aggregating risk across matrix structures loss data: the case of operational risk. Working Paper, ETH Zurich, 2007.
- Engle R. F., Sheppard K. Theoretical and Empirical properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH. NBER Working Papers, № 8554, 2001.
- Engle R. F. Dynamic Conditional Correlation — A Simple Class of Multivariate GARCH Models // *Journal of Business and Economic Statistics*. 2002. № 20. P. 339–350.

Fantazzini D., Dalla Valle L., Giudici P. Empirical Studies with Operational Loss Data: Dalla Valle, Fantazzini and Giudici Study / In: Operational Risk: A Guide to Basel II Capital Requirements, Models, and Analysis. New Jersey: Wiley, 2007. P. 274–277.

Fantazzini D., Dalla Valle L., Giudici P. Copulae and operational risks // *International Journal of Risk Assessment and Management*. 2008. Forthcoming.

Fantazzini D. Dynamic Copula Modelling for Value at Risk. *Frontiers in Finance and Economics*. 2008a. Forthcoming.

Fantazzini D. The Effects of Misspecified Marginals and Copulas on Computing the Value at Risk: A Monte Carlo Study. *Computational Statistics and Data Analysis*. 2008b. Forthcoming.

Gamerman D. Markov Chain Monte Carlo: Stochastic Simulation for Bayesian Inference. London: Chapman & Hall, 1997.

Gelman A., Carlin J. B., Stern H. S., Rubin D. B. Bayesian Data Analysis, Second Edition. Chapman&Hall, 2004.

Gengenbach C., Palm F. C., Urbain J. P. Panel Unit Root Tests in the Presence of Cross-Sectional Dependencies: Comparison and Implications for Modelling. Universiteit Maastricht. 2006. Unpublished.

Giot P., Laurent S. Value-at-Risk for Long and Short Positions // *Journal of Applied Econometrics*. 2003. P. 641–664.

Granger C., Patton A., Terasvirta T. Common Factors in Conditional Distributions for Bivariate Time Series // *Journal of Econometrics*. 2006. № 132. P. 43–57.

Groen J. J. J., Kleibergen F. Likelihood-Based Cointegration Analysis in Panels of Vector Error-Correction Models // *Journal of Business and Economic Statistics*. 2003. № 21. P. 295–318.

Gutierrez L. Panel Unit Roots Tests for Cross-Sectionally Correlated Panels: A Monte Carlo Comparison // *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*. 2006. № 68. P. 519–540.

Hadri K. Testing for Stationarity in Heterogeneous Panel Data // *Econometric Journal*. 2000. № 3. P. 148–161.

Hansen B. Autoregressive Conditional Density Estimation // *International Economic Review*. 1994. № 35 (3). P. 705–730.

Hlouskova J., Wagner M. The Performance of Panel Unit Root and Stationarity Tests: Results from a Large Scale Simulation Study // *Econometric Reviews*. 2006. № 25. P. 85–116.

Hlouskova J., Wagner M. The Performance of Panel Cointegration Methods: Results from a Large Scale Simulation Study // *Econometric Reviews*. 2008. Forthcoming.

Hosking J. R. M., Wallis J. R. Parameter and quantile estimation for the generalized Pareto distribution // *Technometrics*. 2007. № 29. P. 339–349.

Im K. S., Pesaran M. H., Shin Y. Testing for Unit Roots in Heterogeneous Panels // *Journal of Econometrics*. 2003. № 115. P. 53–74.

Kao C. Spurious Regression and Residual-based Tests for Cointegration in Panel Data // *Journal of Econometrics*. 1999. № 90. P. 1–44.

Kao C., Chiang M. H. On the estimation and inference of a cointegrated regression in panel data // *Advances in Econometrics*. 2000. № 15. P. 179–222.

King J. L. Operational Risk: Measurement and Modelling. New York: Wiley, 2001.

Kotz S., Balakrishnan N., Johnson N. L. Continuous multivariate distributions. Vol. 1, 2nd ed. Models and applications. New York: Wiley, 2000.

Joe H., Xu J. The estimation method of inference functions for margins for multivariate models / Department of Statistics, University of British Columbia. 1996. Technical Report n. 166.

Joe H. Multivariate models and dependence concepts / London: Chapman&Hall, 1997.

- Jondeau E., Rockinger M. Conditional volatility, skewness, and kurtosis: existence, persistence, and comovements // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2003. № 27. P. 1699–1737.
- Jondeau E., Rockinger M. The Copula-GARCH Model of Conditional Dependencies: An International Stock-Market Application // *Journal of International Money and Finance*. 2006. № 25. P. 827–853.
- Jorion P. Financial Risk Manager Handbook. 4th edition, Wiley, 2007.
- Larsson R., Lyhagen J., Lothgren M. Likelihood-based Cointegration Tests in Heterogenous Panels // *Econometrics Journal*. 2001. № 4. P. 109–142.
- Levin A., Lin C. F., Chu C. Unit Root Tests in Panel Data: Asymptotic and Finite-Sample Properties // *Journal of Econometrics*. 2002. № 108. P. 1–24.
- Lindskog F., A. McNeil A. Common Poisson shock models: applications to insurance and credit risk modelling // *ASTIN Bulletin*. 2003. № 33 (2). P. 209–238.
- Maddala G. S., Wu S. A Comparative Study of Unit Root Tests with Panel Data and A New Simple Test // *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*. 1999. № 61. P. 631–652.
- Mark N. C., Sul D. Cointegration Vector Estimation by Panel DOLS and Long-run Money Demand // *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*. 2003. № 65. P. 655–680.
- Moscadelli M. The modelling of operational risk: experience with the analysis of the data collected by the Basel Committee, Banca d'Italia, Temi di discussione del Servizio Studi, Num. 517, July 2004.
- Neslehova J., Embrechts P., Chavez-Demoulin V. Infinite mean models and the LDA for operational risk // *Journal of Operational Risk*. 2006. № 1. P. 3–25.
- Rachedi O., Fantazzini D. Multivariate Models for Operational Risk: A Copula Approach using Extreme Value Theory and Poisson Shock Models / In: G. Gregoriou (ed.), Operational Risk towards Basel III: Best Practices and Issues in Modelling, Management and Regulation, Wiley, 2008. December.
- Ripley B. D. Stochastic Simulation. London: Wiley, 1987.
- Sklar A. Fonctions de répartition á n dimensions et leurs marges // *Publ. Inst. Statis. Univ. Paris*. 1959. № 8. P. 229–231.
- Stevens W. L. Fiducial Limits of the parameter of a discontinuous distribution // *Biometrika*. 1950. № 37. P. 117–129.
- Wooldridge J. W. Selection Corrections for Panel Data Models under Conditional Mean Independence Assumptions // *Journal of Econometrics*. 1995. № 68. P. 115–132.